ЧЕТВЪРТИ РАЗДЕЛ

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

Ключови понятия към четвърти раздел

Дефиниционно множество на функция
Граница на функция
Производна на функция
Допирателна към графика на функция
Правило на Лопитал
Екстремум на функция
Изпъкналост; вдлъбнатост; инфлексна точка
Асимптота
Графика на функция

4.1. Функция на една променлива. Начини на задаване на функция. Някои елементарни функции

След усвояване на материала от този раздел ще можете:

- да определяте дефиниционното множество на функциите;
- да намирате граници на функции;
- да определяте производни на функции;
- да намирате уравнението на допирателна към графиката на дадена функция;
- да изследвате поведението и да чертаете графики на функции.

Явленията в природата и в обществения живот се осъществяват чрез зависимости между различни величини. Така например температурата на въздуха се изменя през деня, т. е. температурата зависи от времето. Възнаграждението на един работник зависи от количеството и качеството на произведения от него продукт.

Когато в един процес участват две променливи величини и изменението на едната влияе върху изменението на другата, казваме, че между двете променливи величини има функционална зависимост.

Определение. *Променливата величина y (зависима променлива) се нарича функция на променливата x (аргумент), ако на всяка стойност на x от дадено мгожество по определен начин отговаря точно определена стойност на y. Тази зависимост се означава с $y = f(x)$.*

Дефиниционно множество (дефиниционна област) на дадена функция е множеството от всички допустими стойности на аргумента x.

Област на функционалните стойности е множеството от всички значения на променливата величина y.

За всяка функция се предполагат основно две неща:

1. Знае се дефиниционното множеството от стойности на x .
2. Известно е правилото, по което на всяка стойност на x от дефиниционното множество се намира съответната стойност на y.

Дефиниционната област се задава заедно с формулирането на функцията или се определя от множеството на всички реални числа, за които включените във функцията математически операции е възможно да се извършат.

165. Намерете дефиниционната област на функцията

а) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 5x + 19$; б) $y = \sqrt{25 - x^2}$; в) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$;

г) $F(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 4}$; д) $y = \dfrac{1}{1 - 3^{\frac{x-1}{x-2}}}$; е) $y = \dfrac{8x + 3}{\log_{x-2}(7 - x)}$.

Отг.: а) $x \in (-\infty, \infty)$; б) $x \in [-5, 5]$; в) $x \in (-5, 5)$;

Упътване: г) Трябва да са изпълнени ограниченията

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0. \end{array} \right.$$

Отг.: $x \in (-\infty, -1] \cup [2, 4) \in (4, \infty)$.

Упътване: д) От $x \neq 2$ и $1 - 3^{\frac{x-1}{x-2}} \neq 0$ следва, че дефиниционната област е всяко $x \neq 1$ и $x \neq 2$.

Упътване: е) Трябва да са изпълнени ограниченията

$$\left| \begin{array}{l} x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \\ 7 - x > 0 \\ 7 - x \neq 1. \end{array} \right.$$

Отг.: $x \in (2, 3) \cup (3, 6) \cup (6, 7)$.

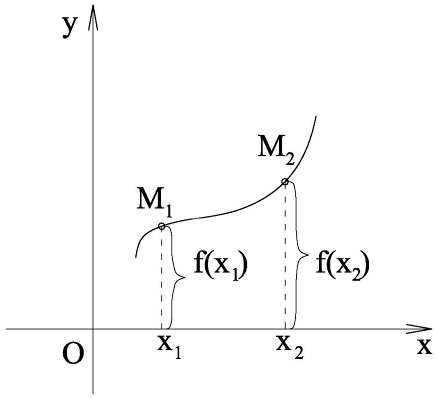
Начини на задаване на функция

Аналитичен. При този начин съответствието между x и y е зададено чрез формула, напр. $f(x) = 3x - \dfrac{5x + 1}{x - 4}$.

Табличен. Стойностите на аргумента и на зависимата променлива се подреждат в таблица. Например температурата на кипене на водата е функция от атмосферното налягане. Тази зависимост е отразена в таблицата.

Налягане [мм]	300	400	500	600	760
Температура [t^o C]	75,8	83,0	88,5	93,5	100

Графичен. Графиката на функцията y = f(x) е съвкупност от точките M(x,y) с абсциса x и ордината y = f(x) в правоъгълната координатна система xOy, фиг 18.



фиг. 18

*****

Понякога една функция може да се опише по друг начин, стига той еднозначно да определя функционалната зависимост. Например прогресивното облагане на дохода, съгласно закона за общия доход от 06. 06.1950, е функция от месечния доход и се описва по следния начин:

$$y = \begin{cases} 0, \quad \text{за} \quad x \le 200, \\ 4{,}00 + 0{,}03(x - 200), \quad \text{за} \quad 200 < x \le 240, \\ 5{,}00 + 0{,}04(x - 240), \quad \text{за} \quad 240 < x \le 280, \\ 6{,}80 + 0{,}05(x - 280), \quad \text{за} \quad 280 < x \le 320, \\ 8{,}30 + 0{,}06(x - 320), \quad \text{за} \quad 320 < x \le 400, \\ 13{,}60 + 0{,}07(x - 400), \quad \text{за} \quad 400 < x \le 480, \\ 19{,}20 + 0{,}08(x - 480), \quad \text{за} \quad 480 < x \le 600, \\ 28{,}80 + 0{,}10(x - 600), \quad \text{за} \quad 600 < x \le 720, \\ 40{,}80 + 0{,}12(x - 720), \quad \text{за} \quad x > 720. \end{cases}$$

Тук x е месечният доход, а y – съответният данък. Например ако месечният доход е 520 лв. данъкът е

$$y = 19{,}20 + 0{,}08(520 - 480) = 22{,}40 \text{ лв.}$$

Някои елементарни функции

Линейна функция. Тя има вида

$$y = kx + n$$

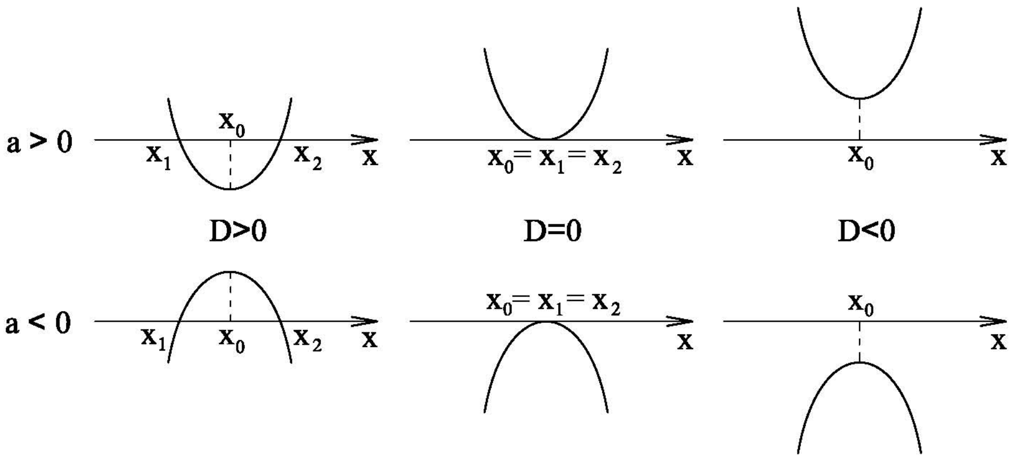
и както читателят знае (вж. 1.2.) графиката й е права линия с ъглов коефициент k и отрез n.

Тази функция е растяща , ако $k > 0$ и е намаляваща, ако $k < 0$. Когато $k = 0$, графиката й е права линия, успоредна на абсцисната ос.

Квадратната функция има вида

$$y = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0.$$

Графиката й, която се нарича *парабола,* може да има едно от шест възможни положения спрямо абсцисната ос в зависимост от знака на *старшия коефициент a* и от знака на *дискриминантата* $D = b^2 - 4ac$, фиг. 19.



фиг. 19

Когато $D > 0$ параболата пресича оста Ox в две точки с абсциси x_1 и x_2, стойностите на които се определят от известната формула

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

за корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Когато $a > 0$, $y > 0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ и $y < 0$ за $x \in (x_1, x_2)$, а когато $a < 0$, $y > 0$ за $x \in (x_1, x_2)$ и $y < 0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

Когато $D = 0$ параболата допира оста Ox в точката $x_0 = x_1 = x_2$. За всяка друга стойност на x при $a > 0$ стойностите на y са положителни, а при $a < 0$ стойностите на y са отрицателни.

Когато $D < 0$ параболата няма общи точки с оста Ox. При $a > 0$ $y > 0$, а когато $a < 0$ $y < 0$ за всяка стойност на x.

Когато старшият коефициент $a > 0$ параболата има минимум, а при $a < 0$ параболата има максимум. Във всеки от тези шест случая от фиг. 19 точката на минимума, както и точката на максимума има абсциса

$$x_o = -\frac{b}{2a},$$

а стойността на съответната ордината е равна на

$$y(x_o) = y(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

166. За параболите

а) $y = 2x^2 - 3x - 2$; б) $y = -x^2 - 1$; в) $y = -x^2 + 2x + 3$; г) $y = x^2 + \frac{1}{3}x + 2$

намерете:

- пресечните точки с абсцисната ос;
- координатите на минимума (максимума);
- координатите на пресечните точки с ординатната ос.

Отг.: а) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$; $\min(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8})$; $(0, -2)$;

б) не пресича Ох; $\max(0, -1)$; $(0, -1)$;

в) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; $\max(1, 4)$, $(0, 3)$;

г) не пресича Ох; $\min(-\frac{1}{6}, \frac{71}{36})$; $(0, 2)$.

Дробно линейната (хомографична) функция

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

е дефинирана за всяко $x \neq -\frac{d}{c}$. Тя има вертикална асимптота с уравнение $x = -\frac{d}{c}$, (вж. 4.7.6.) защото

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} y = \pm\infty;$$

тя има хоризонтална асимптота с уравнение $y = \frac{a}{c}$, защото

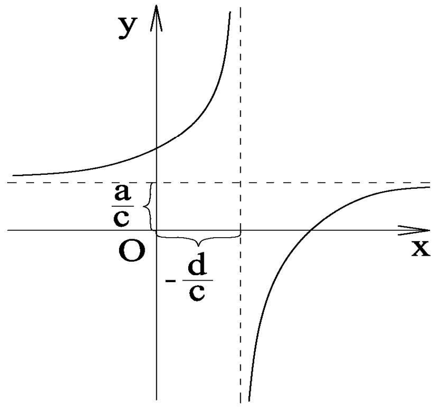
$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(a + \frac{b}{x})}{x(c + \frac{d}{x})} = \frac{a}{c}.$$

Първата й производна е равна на (вж. 4.5.)

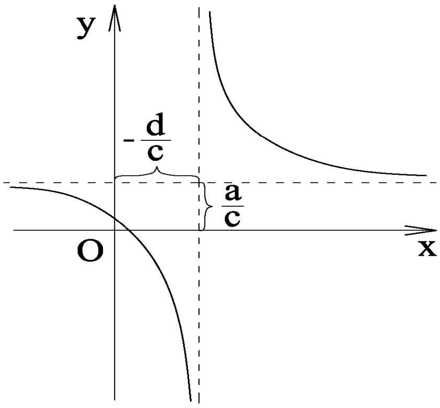
$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Ако $ad - bc = 0$, то $y' = 0$ и $y = const.$, т. е. графиката й в този случай е права линия, успоредна на абсцисната ос.

Ако $ad - bc \neq 0$, при $ad - bc > 0$ функцията е растяща за всяко x, фиг. 20, а когато $ad - bc < 0$ функцията е намаляваща за всяко x, фиг. 21.



фиг. 20



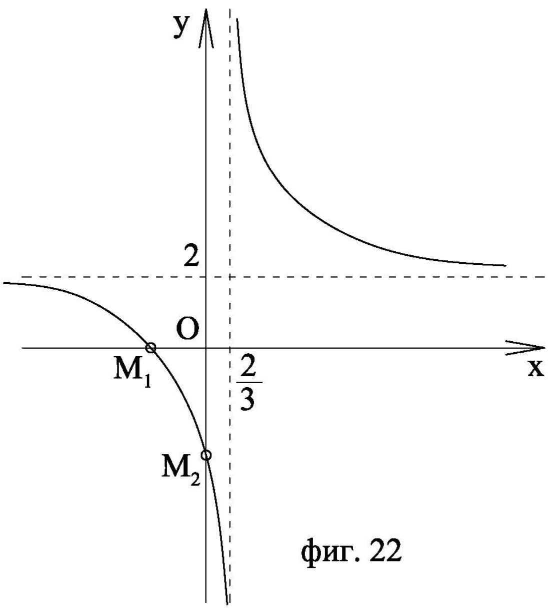
фиг. 21

167. Постройте графиките на функциите

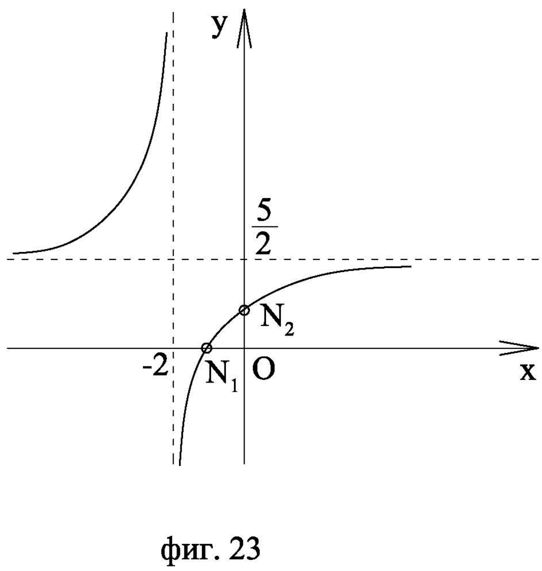
а) $y = \dfrac{6x+1}{3x-2}$; б) $y = \dfrac{5x+6}{2x+4}$.

Отг.: а) $y' = \dfrac{-15}{(3x-2)^2} < 0$ за всяко x; минава през точките $M_1(-\dfrac{1}{6}, 0), M_2(0, -\dfrac{1}{2})$, фиг. 22.

б) $y' = \dfrac{8}{(2x+4)^2} > 0$ за всяко x; минава през точките $N_1(-\dfrac{6}{5}, 0), N_2(0, \dfrac{3}{2})$, фиг. 23.



фиг. 22



фиг. 23

4.2. Обратни тригонометрични функции

Функцията у = arcsin x *(аркус синус от х) е дефинирана за всяко* $x \in [-1,1]$ *и функционалните й стойности включват всички дъги от интервала* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *като са изпълнени зависимостите*

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \arcsin(\sin x) = x.$$

Например $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, защото $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1,1]$, $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функцията у = arcos x *(аркус косинус от х) е дефинирана за всяко* $x \in [-1,1]$ *и функционалните й стойности включват всички дъги от интервала* $[0, \pi]$, *като са изпълнени зависимостите*

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \arccos(\cos x) = x.$$

Например $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, защото $\frac{1}{2} \in [-1, 1]$, $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Функцията у = arctg x *(аркус тангенс от х) е дефинирана за всяко* $x \in (-\infty, \infty)$ *и функционалните й стойности включват всички дъги от интервала* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *като са изпълнени зависимостите*

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x, \qquad \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x.$$

Например $\mathrm{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, защото $1 \in (-\infty, \infty)$, $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $tg\frac{\pi}{4} = 1$.

Функцията у = arccotg x *(аркус котангенс от х) е дефинирана за всяко* $x \in (-\infty, \infty)$ *и функционалните й стойности включват всички дъги от интервала* $(0, \pi)$, *като са изпълнени зависимостите*

$$\mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}\, x) = x, \qquad \mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}\, x) = x.$$

Например $\mathrm{arccotg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, защото $\sqrt{3} \in (-\infty, \infty)$, $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$, $\mathrm{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

168. Намерете стойността на

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos(-\frac{1}{2})$; в) $\mathrm{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$; г) $\mathrm{arccotg}(-\sqrt{3})$.

Отг.: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$.

169. Докажете зависимостите

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $\mathrm{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) cos(arcсcotg x) = $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; г) cotg(arcsin x) = $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

д) arcsin x + arcos x = $\dfrac{\pi}{2}$; е) arctg x + arccotg x = $\dfrac{\pi}{2}$.

Доказателство: а) sin(arcos x) = $\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$;

б) tg(arcsin x) = $\dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) cos(arccotg x) = $\dfrac{\cot g(arc\cot gx)}{\sqrt{1+\cot g^2(arc\cot gx)}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) cotg(arcsin x) = $\dfrac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}{x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

д) полагаме arcsin x = u, arcos x = v, откъдето x = sin u, x = cos v = $\sin(\dfrac{\pi}{2}-v)$

или sin u = $\sin(\dfrac{\pi}{2}-v)$. Но $-\dfrac{\pi}{2} \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, а от $0 \le$ arcos x $\le \pi$ следва

$-\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} - \arccos x \le \dfrac{\pi}{2}$, така че $-\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} - v \le \dfrac{\pi}{2}$, откъдето u = $\dfrac{\pi}{2} - v$ или

u + v = $\dfrac{\pi}{2}$, което трябваше да се докаже.

е) доказателството е аналогично на случай д).

4.3. Граница на функция. Свойства на граница на функция. Неперово число

Тук предполагаме, че читателят е запознат с понятието *граница на редица* от средния курс.

Определение I. *Числото A се нарича граница на функцията f(x) при x клонящо към a (чрез стойности различни от a), когато при всеки избор на редицата*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

от стойности на аргумента от дефиниционната област на функцията с граница a, съответната редица от стойности на функцията

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

има граница числото A.

Това се записва по един от двата начина

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x\to a}{\to} A.$$

Свойства на граница на функция

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x).$

2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x).$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, *ako* $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0.$

4. Ако за всяко x от интервал, съдържащ точката x = a са изпълнени неравенствата

$$f(x) \le g(x) \le F(x)$$

и освен това

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} F(x)=A,$$

то и

$$\lim_{x\to a} g(x)=A.$$

От свойство 2 могат да се формулират две следствия.

а) $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, когато c = const.

б) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n.$

170. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 2}(7x^2-5).$$

Решение: Дефиниционната област на функцията f(x) = $7x^2-5$ е всяко $x\in(-\infty,\infty)$. Този интервал съдържа точката x = 2, затова каквато и редица от стойности на аргумента да изберем, която клони към 2, то съответната редица от функционални стойности ще е сходяща и границата й ще бъде равна на

$$\lim_{x\to 2}(7x^2-5)=7.4-5=23.$$

171. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}$.

Решение: Функцията f(x) = $\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}$ е дефинирана за всяко $x\neq -2$ и $x\neq 3$.

Преобразуваме тази функция така:

$$f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x^2+3x+9}{x+2}.$$

Когато $x\to 3$, търсената граница е равна на $f(x)\underset{x\to 3}{\to}\dfrac{27}{5}$.

Графиката на функцията f(x) е графиката на функцията $y=\dfrac{x^2+3x+9}{x+2}$ без точката $(3, \dfrac{27}{5})$.

172. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x+1}{x-2}$.

Решение: Функцията $\dfrac{5x+1}{x-2}$ е дефинирана за всяко $x\neq 2$. Нека най-напред x клони към 2 чрез стойности по-малки от 2. Този граничен процес отразяваме така:

$$\lim_{\substack{x=2-\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{5x+1}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5(2-\varepsilon)+1}{2-\varepsilon-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{11-5\varepsilon}{-\varepsilon} = -\infty.$$

Нека сега x отново клони към 2, но чрез стойности по-големи от 2. Това отразяваме по аналогичен начин:

$$\lim_{\substack{x=2+\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{5x+1}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5(2+\varepsilon)+1}{2+\varepsilon-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{11+5\varepsilon}{\varepsilon} = \infty.$$

Съгласно даденото определение за граница на функция, функцията $\frac{5x+1}{x-2}$ няма граница в точката x = 2, защото при различен избор на редицата $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, която клони към 2 (чрез стойности по-малки от 2 или по-големи от 2), съответните редици от функционални стойности не клонят към една и съща граница.

В такива случаи говорим за *лява граница* и *за дясна граница на функцията.*

Лявата и дясната граница на функцията $\frac{5x+1}{x-2}$, когато x клони към 2, често се означава и така:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{5x+1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{5x+1}{x-2} = \infty.$$

173. Намерете лявата и дясната граница на функцията

а) $\frac{3-2x^2}{x-5}$, когато $x\to 5$; б) $\frac{4x+7}{3x+2}$, когато $x\to -\frac{2}{3}$.

Отг.: а) $\lim\limits_{x\to 5-0}\frac{3-2x^2}{x-5} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 5+0}\frac{3-2x^2}{x-5} = -\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}-0}\frac{4x+7}{3x+2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}+0}\frac{4x+7}{3x+2} = \infty$.

На понятието граница на функция може да се даде и втора формулировка.

Определение II. *Числото A се нарича граница на функцията f(x), когато x клони към a, чрез стойности различни от a, ако за всяко число* $\varepsilon > 0$ *може да се намери число* $\delta > 0$ *(евентуално зависещо от* ε), *така че за всяко x от дефиниционната област на функцията f(x), удовлетворяващо неравенството*

$$|x-a| < \delta,$$

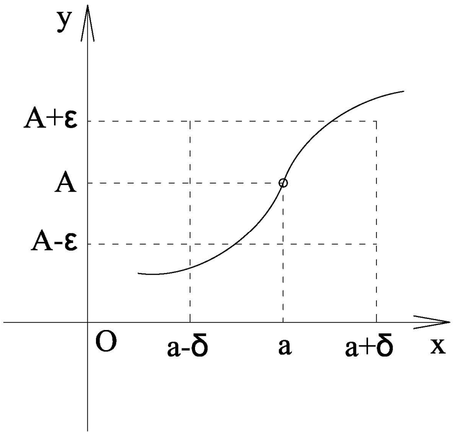
да бъде изпълнено неравенството

$$|f(x)-A| < \varepsilon.$$

Неравенството $|x-a| < \delta$ е екравалентно на двойното неравенство

$$a - \delta < x < a+\delta,$$

а неравенството $|f(x)-A| < \varepsilon$ е еквивалентно на двойното неравенство



фиг. 24

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

От това следва, че последното определение изразява геометрически факта, че когато x принадлежи на интервала $(a-\delta,\ a+\delta)$, графиката на функцията f(x) изцяло принадлежи на правоъгълника с център точката (a, A) и страни с дължини 2δ и 2ε, които са успоредни на координатните оси, фиг. 24.

*****

Границата

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

е равна на ирационалното число e*, което се нарича Неперово число и има приблизителна стойност*

$$e \approx 2{,}71828183\ldots$$

Логаритмите при основа Неперовото число се наричат *натурални (Неперови) логаритми* и се означават с ln x, а показателната функция e^x, която е с основа Неперовото число, се нарича *експоненциална функция*.

*****

174. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-1}\right)^{\frac{x-6}{4}}$.

Решение: а) Полагаме $\dfrac{k}{x}=\dfrac{1}{t}$. От x = кt следва, че когато $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Тогава

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{tk} = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{k} = e^{k}.$$

б) Полагаме $\dfrac{3x+5}{3x-2}=1+\dfrac{1}{u}$. Определяме $x=\dfrac{7u+2}{3}$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{7u+5}{6}$. Когато $x\to\infty$ и $u\to\infty$. Тогава

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{7u+5}{6}} = \lim_{u\to\infty}\left[\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{7}{6}}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{5}{6}}\right] = e^{\frac{7}{6}}.1 = \sqrt[6]{e^{7}}.$$

Отг.: в) e^2.

175. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-3x}$.

Решение: а) Полагаме tg x = $1+\frac{1}{u}$. Когато x$\to\frac{\pi}{4}$, u$\to\infty$. Определяме

$$\text{tg2x} = \frac{2tgx}{1-tg^2x} = \frac{2(1+\frac{1}{u})}{1-(1+\frac{1}{u})^2} = \frac{2u(u+1)}{-2u-1} = -u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2u+1)}.$$

Тогава

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x} = \lim_{u\to\infty} [(1+\frac{1}{u})^{-u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2u+1)}}] = \lim_{u\to\infty} [((1+\frac{1}{u})^u)^{-1}.(1+\frac{1}{u})^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2u+1)}}] = e^{-1}.1.1 = \frac{1}{e}.$$

Същата граница е намерена по друг начин в задача 190.

б) Полагаме 1-3x = 1 + $\frac{1}{u}$. Когато x$\to$ 0, $u\to\infty$. Имаме x = $-\frac{1}{3u}$, $\frac{1}{x}=-3u$, откъдето

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-3x} = \lim_{x\to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} (1+\frac{1}{u})^{-3u} = \lim_{u\to\infty} ((1+\frac{1}{u})^u)^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

4.4. Непрекъснатост на функция

Определение. *Функцията f(x) е непрекъсната в точката x = a, ако:*

1. *f(x) е дефинирана за x = a;*
2. *съществува границата* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3. *тази граница е равна на стойността на функцията в точката x = a, т. е.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Ако поне едно от тези условия е нарушено, казваме че x = a е точка на прекъсване за тази функция.

Като използваме една от дефинициите за граница на функция, това определение може да се формулира така.

Функцията f(x) е непрекъсната в точката x = a, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ *може да се намери такова число* $\delta > 0$, *че неравенството* $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ *да е изпълнено за всяко x, което удовлетворява неравенството* $|x-a| < \delta$.

От тази формулировка следва, че ако една функция е непрекъсната в дадена точка, на безкрайно малко нарастване на аргумента около тази точка отговаря безкрайно малко нарастване на функцията, както и обратно, ако на безкрайно малко нарастване на аргумента около една точка отговаря безкрайно малко нарастване на функцията, тя е непрекъсната в тази точка.

Определение. *Ако една функция е непрекъсната във всяка точка от даден интервал, тя се нарича непрекъсната в този интервал.*

176. Установете непрекъсната ли е функцията $y = \dfrac{1}{x-7}$ в точката $x = 7$.

Решение: От границата

$$\lim_{\substack{x=7-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \frac{1}{x-7} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{7-\varepsilon-7} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

разбираме, че на безкрайно малко нарастване на аргумента около точката $x = 7$ отговаря безкрайно голямо нарастване на функцията, т. е. функцията е прекъсната за $x = 7$.

Ще отбележим, че в точката $x = 7$ функцията е прекъсната, защото тя не е дефинирана за $x = 7$.

177. Установете непрекъсната ли е функцията $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ в точката $x = 1$.

Решение: $$\lim_{\substack{x=1-\varepsilon \\ \varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\varepsilon}}} = 1,$$

$$\lim_{\substack{x=1+\varepsilon \\ \varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 0.$$

Лявата и дясната граница при $x \to 1$ са различни, следователно в точката $x = 1$ тази функция е прекъсната.

178. Определете всички стойности на параметъра a, за които функцията

а) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \ \textit{когато}\ x \le 1, \\ a^2 - a + x, \ \textit{когато}\ x > 1; \end{cases}$ б) $g(x) = \begin{cases} 2x-3, \ \textit{когато}\ x \ge 4, \\ 4a^3x - ax^3 + 5, \ \textit{когато}\ x < 4 \end{cases}$

е непрекъсната за всяко x.

Решение: а) f(x) е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. За да са равни лявата и дясната граница при $x \to 1$, трябва да е в сила

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 3.$$

От квадратното уравнение $a^2 - a + 1 = 3$ намираме $a = -1$ и $a = 2$, следователно f(x) е непрекъсната за всяко x, ако $a = -1$ и $a = 2$.

Отг.: б) $a = 0$ и $a = \pm 2$.

4.5. Производна на функция

Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната.

Определение. *Ако за функцията f(x) съществува границата*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

където x_0 *е точка от дефиниционната област на функцията, а* $x_0 + \Delta x$ *е нарасналата стойност на аргумента в тази точка, казваме, че f(x) е диференцируема в точката* x_0 *. Стойността на тази граница се нарича първа производна на f(x) и се означава с* $f^{/}(x)$.

От определението следва, че производната на функцията f(x) в точката x_o е число, което зависи от стойността на аргумента x_o, но не зависи от нарастването Δx.

Връзката между непрекъснатост и диференцируемост на една функция се дава от следната

Теорема. *Ако функцията f(x) е диференцируема в точката* $x = x_o$*, тя е непрекъсната в тази точка.*

4.5.1. Таблица на формулите за диференциране

Функция	Производна
y = c (c = const.)	$y^{/} = 0$
y = u ± v	$y^{/} = u^{/} \pm v^{/}$
y = uv	$y^{/} = u^{/}v + uv^{/}$
$y = \frac{u}{v}$	$y^{/} = \frac{u^{/}v - uv^{/}}{v^2}$
y = f(u), u = u(x)	$y^{/} = f^{/}(u).u^{/}(x)$
$y = x^n$	$y^{/} = nx^{n-1}$
$y = a^x$, a > 0, a ≠ 1	$y^{/} = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y^{/} = e^x$
$y = \log_a x$, x > 0, a > 0, a ≠ 1	$y^{/} = \frac{1}{x \ln a}$
y = ln x, x > 0	$y^{/} = \frac{1}{x}$
y = sin x	$y^{/} = \cos x$
y = cos x	$y^{/} = -\sin x$
y = tg x	$y^{/} = \frac{1}{\cos^2 x}$
y = cotg x	$y^{/} = \frac{-1}{\sin^2 x}$
y = arcsin x	$y^{/} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = arcos x	$y^{/} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = arctg x	$y^{/} = \frac{1}{1+x^2}$
y = arccotg x	$y^{/} = \frac{-1}{1+x^2}$

179. Намерете първата производна на функцията

а) $y = 6x^5 - 7x + 4\cos x + 3\text{tg}\, x - 2\text{arccotg}\, x - 9\ln x - 8e^x + 17$;

б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \sqrt[3]{x}$;

г) $y = \arcsin\sqrt{x}$; д) $y = \sqrt[3]{4x^2 - 7\sin x}$;

е) $y = \text{arctg}\dfrac{3x-2}{2x+1}$; ж) $y = e^{2\sin x}$;

з) $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \text{arctg}\, x\right)$; и) $y = \ln(x + \sqrt{5+x^2})$; й) $y = \dfrac{1}{10}\ln\dfrac{x-8}{x+2}$.

Отг.: а) $y' = 30x^4 - 7 - 4\sin x + \dfrac{3}{\cos^2 x} + \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{9}{x} - 8e^x$;

Решение: б) Тъй като $y = x^{\frac{1}{2}}$, то $y' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $y' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

г) Използваме формулата за диференциране на сложна функция:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}};$$

д) $y' = \dfrac{1}{3}(4x^2 - 7\sin x)^{-\frac{2}{3}}.(4x^2 - 7\sin x)' = \dfrac{8x - 7\cos x}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 7\sin x)^2}}$;

е) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^2}.\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)' = \dfrac{7}{13x^2 - 8x + 5}$; ж) $y' = 2\cos x e^{2\sin x}$;

Отг.: з) $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$; и) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{5+x^2}}$; й) $y' = \dfrac{1}{x^2 - 6x - 16}$.

180. Намерете първата производна на функциите

а) $y = (\text{tg}\, x)^{\sin x}$; б) $y = (2x-1)^{\text{cotg}\, x}$; в) $y = (5x)^{6x}$;

Решение: Производните на тези функции могат да се намерят с *предварително логаритмуване.*

а) Логаритмуваме двете страни:

$$\ln y = \sin x . \ln(\text{tg}\, x).$$

Сега диференцираме двете страни на това равенство:

$$\frac{y'}{y} = \cos x . \ln(tgx) + \sin x . \frac{1}{tgx} . \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Заместваме y със стойността на тази функция и окончателно намираме

$$y' = (tgx)^{\sin x}\left(\cos x . \ln(tgx) + \frac{1}{\cos x}\right).$$

Отг.: б) $y' = (2x-1)^{\cot gx}\left(2\cot gx + \dfrac{1-2x}{\sin^2 x}\right)$; в) $y' = 6(5x)^{6x}[\ln(5x) + 1]$.

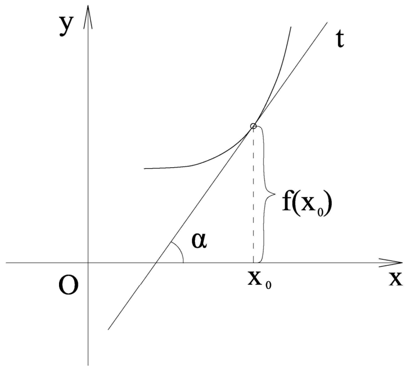
4.6. Геометричен смисъл на производната

Нека правата t е допирателна (тангента) към графиката на функцията f(x) в точката $M[x_0, f(x_0)]$, фиг. 25. Ако t сключва с положителната посока на Ox ъгъл α, *то ъгловият коефициент на тази права е равен на първата производна на f(x), изчислена за $x = x_0$, т. е.*

$$k = \mathrm{tg}\alpha = f^{/}(x_o).$$

Уравнението на тази допирателна е (вж. в 1.2. уравнение на права през дадена точка и с даден ъглов коефициент)

$$y - f(x_o) = f^{/}(x_o)(x - x_o).$$



фиг. 25

181. Намерете уравнението на допирателната към функцията $f(x)=2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ в точката от графиката й, която има абсциса $x = 2$.

Решение: $f(2) = 7$; $f^{/}(x) = 6x^2 - 6x + 4$; $f^{/}(2) = 16$. Уравнението на допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(2, 7)$ е $y - 7 = 16(x - 2)$ или

$$16x - y - 25 = 0.$$

179. Намерете уравнението на допирателната към функцията $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+4}$ в точката от графиката й, която има ордината $y = \dfrac{1}{3}$.

Решение: От уравнението $\dfrac{3x-1}{2x+4} = \dfrac{1}{3}$ намираме $x = 1$; $f^{/}(x) = \dfrac{14}{(2x+4)^2}$; $f^{/}(1) = \dfrac{7}{18}$.

Допирателната, минаваща през точката $(1, \dfrac{1}{3})$ има уравнение $y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18}(x-1)$ или

$$7x - 18y - 1 = 0.$$

183. Намерете уравнението на допирателната към графиката на функцията $y = \dfrac{x^2+1}{3x-1}$, която е успоредна на правата p: $x + 2y + 1 = 0$.

Решение: $y^{/} = \dfrac{3x^2 - 2x - 3}{(3x-1)^2}$. Ъгловият коефициент на търсената допирателна съвпада с ъгловия коефициент на правата p, а той е равен на $-\dfrac{1}{2}$. От уравнението

$$\frac{3x^2 - 2x - 3}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

получаваме квадратното уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$, което има корени $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = 1$. Това показва, че има две допирателни към графиката на функцията, които са успоредни на правата p.

Ако $x = -\frac{1}{3}$, то $y(-\frac{1}{3}) = -\frac{5}{9}$. Допирателната, която минава през точката $(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9})$ има уравнение $9x + 18y + 13 = 0$. Уравнението на допирателната, която минава през точката $(1, 1)$ е $x + 2y - 3 = 0$.

185. Дадени са параболите $f(x) = x^2 - 4x + 7$ и $g(x) = x^2 - 8x + 19$. Намерете:

а) уравненията на допирателните към всяка от тях в пресечната им точка;

б) ъгълът между тези допирателни;

в) лицето на триъгълника, образуван между тези допирателни и абсцисната ос.

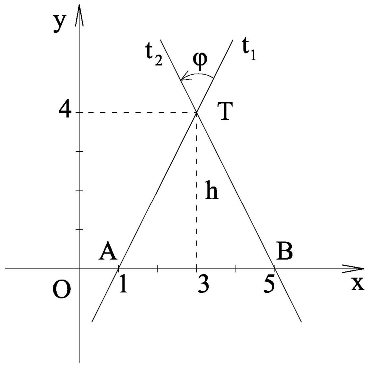
Решение: а) Абсцисата на пресечната точка се получава от уравнението

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 8x + 19,$$

т. е. $x = 3$. Ординатата е равна на $f(3) = g(3) = 4$. Пресечната точка на двете параболи е $T(3, 4)$.

От $f'(x) = 2x - 4$ намираме ъгловия коефициент $k_1 = f'(3) = 2$. Уравнението на допирателната към $f(x)$ в точката T е t_1: $2x - y - 2 = 0$.

От $g'(x) = 2x - 8$ намираме ъгловия коефициент $k_2 = g'(3) = -2$. Уравнението на допирателната към $g(x)$ в точката T е t_2: $2x + y - 10 = 0$.



фиг. 26

б) Тангенсът на ъгъла φ между двете допирателни, фиг. 26, се определя по формулата (вж. 1.2.)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-2-2}{1-4} = \frac{4}{3}$$

или $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

в) Допирателната t_1 пресича Ox в точката A(1, 0), а допирателната t_2 пресича Ox в точката B(5, 0). Лицето S на триъгълника ABT е равно на

$$S = \frac{1}{2}|AB|.h = \frac{1}{2}.4.4 = 8.$$

186. Дадени са функциите $y = x^3 - x^2 + 3x - 7$ и $y = x^3 - x^2 - 5x + 9$. Намерете:

а) уравненията на допирателните към всяка от тях в пресечната точка на графиките им.

б) ъгъла между тези допирателни;

в) лицето на триъгълника, образуван между допирателните и Ox.

Отг.: а) Пресечната точка е T(2, 3); t_1: 3x-y-3=0, t_2: 11x-y-19=0.

б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{17}$; в) $S = \frac{12}{11}$. Вж. зад. 185.

4.7. Приложение на производните при изследване на функции

4.7.1. Неопределени форми. Теорема на Лопитал

Ако за функцията $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x = a$ е в сила $f(a) = g(a) = 0$, то $F(x)$ не е дефинирана в точката a. Имаме

$$F(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}.$$

Изразът $\dfrac{0}{0}$ се нарича *неопределена форма.* Интересен е въпросът има ли функцията $F(x)$ граница, когато x клони към a? Отговор на този въпрос дава *теоремата на Лопитал,* която често се нарича *правило на Лопитал.*

Теорема. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервал, съдържащ точката $x = a$ и притежават производна в този интервал, евентуално с изключение в тази точка. Освен това $f(a) = g(a) = 0$. Ако съществува границата $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теоремата остава в сила и когато при $x\to a$ функциите $f(x)$ и $g(x)$ растат неограничено. Тогава имаме *неопределеност от вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

187. Да се намери границата

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+7}{2x^2+x+3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-12x+20}{3x^4-12x^3+11x^2+4x-4}$.

Решение: а) Тук $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^3$; $f(0)=g(0)=0$. Имаме неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал последователно три пъти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

б) Числителят и знаменателят растат неограничено, когато $x\to\infty$. Налице е неопределеност от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Според правилото на Лопитал

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x+7}{2x^2+x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{12x-5}{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{12}{4} = 3.$$

Отг.: в) $\dfrac{9}{11}$.

188. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\cos\pi x}{(x^2-4)^2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7x+2}+3x-10}{x^2-4\sin\frac{\pi x}{4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}+3e^{-x}+x^2-4}{1-\cos 2x}$.

Отг.: а) $\dfrac{\pi^2}{32}$; *б*) 1; в) $\dfrac{31}{32}$; г) $\dfrac{7}{2}$.

*****

При *неопределеност от вида* $0\,.\infty$ *или* $\infty-\infty$ се налага предварително преобразуване, което да доведе до неопределените форми $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Това е направено в следващата задача.

189. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot g 3x$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})$; *в*) $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3}{x^3-8})$.

Решение: а) Когато $x\to 0$ функцията $x\text{cotg } 3x$ е от вида $0.\infty$, затова я преобразуваме така:

$$x\text{cotg } 3x=\frac{x}{\frac{1}{\cot g3x}}=\frac{x}{tg3x}.$$

Сега при $x\to 0$ неопределената форма е $\dfrac{0}{0}$. Тогава

$$\lim_{x\to 0} x\cot g3x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\frac{1}{3}.$$

Забележка. Преобразуването може да се осъществи и така:

$$x\text{cotg } 3x=\frac{\cot g3x}{\frac{1}{x}}.$$

Тогава неопределената форма ще бъде от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Крайният резултат ще бъде същият. Проверете!

б) **Упътване:** Сега неопределеността е от вида ∞-∞. Функцията преобразувайте във вида:

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x},$$

след което приложете правилото на Лопитал последователно три пъти. Отг.: $\dfrac{1}{2}$.

в) Приведете под общ знаменател. Отг.: $\dfrac{1}{16}$.

*****

Ако е налице неопределеност от вида 0^0, ∞^0 или 1^∞, задачата се решава с *предварително логаритмуване.* Това ще приложим в следващата задача.

190. Намерете границите

а) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;   *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;   *в*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tgx^{tg2x}$;

Решение: а) Функцията $F(x) = x^x$ при $x = 0$ получава вида 0^0. Логаритмуваме двете страни:

$$\ln F(x) = \ln(x^x) = x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

при което се получава неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$. Прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0} \ln F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

След антилогаритмуване се получава

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$$

Упътване: В случаите б) и в) приложете предварително логаритмуване.

Отг.: б) 1;   в) $\frac{1}{e}$.

Забележка. Границата от случай в) е решена по друг начин в задача 175 а).

4.7.2 Формули на Тейлор и Маклорен

Нека функцията f(x) има производни до (n+1)-ви ред в някакъв интервал от дефиниционната област, съдържащ точката x = a. Тогава тази функция може да се представи във вида

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

където $R_n(x)$ се нарича *остатъчен член* или *грешка*. Това представяне са нарича *Тейлорово развитие на функцията f(x) в точката a.* Колкото е по-голямо цялото число n, толкова грешката R(x) има по-малка стойност и когато $n\to\infty$ R(x) клони към нула, в случай че x е достатъчно близко до точката a.

Ако a = 0 Тейлоровото развитие получава вида

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

и се нарича *Маклореново развитие на функцията f(x).*

191. Намерете Маклореновото развитие на функцията $f(x) = e^x$.

Решение: Намираме последователно

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = e^x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = e^x, \qquad f''(0) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1.$$

Маклореновото развитие на функцията $f(x) = e^x$ е

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

При $x = 1$ получаваме

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1).$$

Това представяне позволява да се пресметне Неперовото число e с предварително зададена точност.

При $n = 4$ се получава

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2{,}71.$$

Тук грешката е по-малка от 0,025.

При $n = 14$ приближението е

$$e = 2{,}7182818288,$$

с грешка по-малка от 10^{-12}.

192. Да се намери Маклореново развитие на функцията

а) sin x; б) ln(x+1).

Решение: а) Последователните производни на функцията f(x) = sinx представяме така:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \qquad f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2.\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3.\frac{\pi}{2}), \qquad f^{IV}(x) = \cos(x + 3.\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 4.\frac{\pi}{2}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos[x + (n-1)\frac{\pi}{2}] = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

Тогава намираме

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0) = 0, \ldots, f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Маклореновото развитие е

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin n\frac{\pi}{2} + R_n(x).$$

Отг.: б) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$

193. Като използвате първите четири събираеми в развитието на функцията sinx от задача 192, изчислете стойността на $\sin 18^0$. Грешката ще бъде от порядъка на 10^{-5}.

Решение: Представяме 18^0 в радианна мярка:

$$18^0 = \frac{\pi}{180}.18\,rad = \frac{\pi}{10}rad$$

и приемаме $\pi = 3{,}1415$. Тогава

$$\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{3{,}1415}{10} - \frac{3{,}1415^3}{10^3.3!} + \frac{3{,}1415^5}{10^5.5!} - \frac{3{,}1415^7}{10^7.7!} =$$
$$= 0{,}3142 - 0{,}0052 + 0{,}0000 - 0{,}0000 = 0{,}3090.$$

4.7.3. Монотонност на функция

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b). Ако за всеки две стойности x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1 < x_2$ е в сила:

а) *$f(x_1) < f(x_2)$, $f(x)$ се нарича растяща в интервала (a, b);*

б) $f(x_1) \le f(x_2)$, $f(x)$ се нарича ненамаляваща в интервала (a, b);

в) $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x)$ се нарича намаляваща в интервала (a, b);

г) $f(x_1) \ge f(x_2)$, $f(x)$ се наричача нерастяща в интервала (a, b).

Във всеки от тези четири случая се казва, че функцията $f(x)$ е монотонна в интервала (a, b).

Теорема. *Необходимото и достатъчно условие една функция да бъде растяща (намаляваща) в даден интервал е тя да е диференцируема и първата й производна да бъде положителна (отрицателна) във всяка точка от този интервал.*

194. Намерете интервалите на растене и интервалите на намаляване на функцията

а) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 7$; б) $g(x) = \sqrt{2\cos x + x\sqrt{3}}$, когато $x \in (0, \pi)$.

Решение: а) Дефиниционната област на функцията е всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Първата й производна е равна на

$$f^{/}(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4).$$

Уравнението $f^{/}(x) = 0$ има корени $x = 1$ и $x = 4$. Тези стойности на x разделят дефиниционната област на три интервала: $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$, $(4, \infty)$. Във всеки от тях първата производна има постоянен знак. Изчисляваме стойността на първата производна за произволни значения на x от всеки интервал.

$$f^{/}(0) = 24 > 0, \quad f^{/}(2) = -12 < 0, \quad f^{/}(5) = 24 > 0.$$

Според последната теорема, когато $x \in (-\infty, 1)$ и $x \in (4, \infty)$ $f(x)$ е растяща, а когато $x \in (1, 4)$, $f(x)$ е намаляваща.

б) $g^{/}(x)=\dfrac{-2\sin x+\sqrt{3}}{2\sqrt{2\cos x+x\sqrt{3}}}$. Уравнението $g^{/}(x)=0$, т. е. sinx = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, има два корена в дефиниционния интервал $(0,\ \pi)$: $x=\dfrac{\pi}{3}$ *и* $x=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаците на $g^{/}(x)$ в трите интервала $(0,\ \dfrac{\pi}{3})$, $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$, $(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$ са съответно: $g^{/}(\dfrac{\pi}{6})>0$, $g^{/}(\dfrac{\pi}{2})<0$, $g^{/}(\dfrac{5\pi}{6})>0$.

Следователно g(x) е растяща, когато $x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$ и $x\in(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$, и е намаляваща, когато $x\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$.

195. Определете интервалите на растене и намаляне на функцията

а) $f(x)=\dfrac{3x+1}{5x-4}$; б) $g(x)=\dfrac{5x^2-x+5}{x^2-x+1}$.

Отг.: а) $f^{/}(x)=\dfrac{-17}{(5x-4)^2}<0$ за всяко x, затова f(x) е намаляваща за всяко $x\in(-\infty,\dfrac{4}{5})$ и $x\in(\dfrac{4}{5},\infty)$.

б) $g^{/}(x)=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2-x+1)^2}$. $g(x)$ е растяща, когато $x\in(-1,1)$ и е намаляваща, когато $x\in(-\infty,-1)$ и $x\in(1,\infty)$.

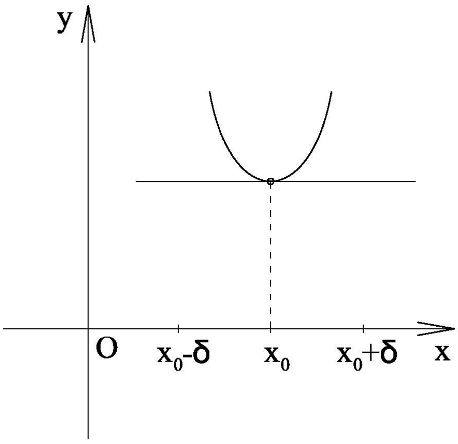
4.7.4. Екстремум на функция

Функцията f(x) има локален минимум в точката x_0 (фиг. 27), ако за всяка стойност на x от интервал, съдържащ x_0 е в сила неравенството

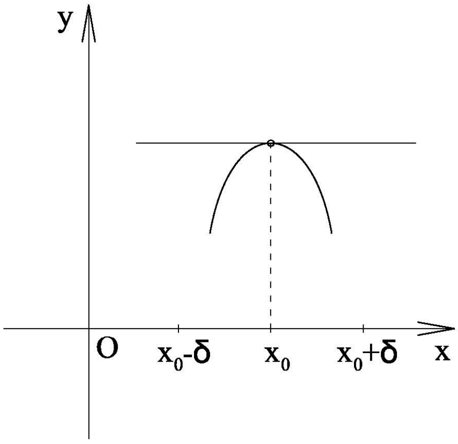
$$f(x_0)\le f(x).$$

Функцията f(x) има локален максимум в точката x_0 (фиг. 28), ако за всяка стойност на x от интервал, съдържащ x_0 е в сила неравенството

$$f(x_0)\ge f(x).$$



фиг. 27



фиг. 28

Под локален екстремум на функция в дадена точка се разбира локален минимум или локален максимум в тази точка.

Под абсолютен екстремум на функцията се разбира най-малката стойност (абсолютен минимум) или най-голямата стойност (абсолютен максимум) на функцията в цялото дефиниционно множество.

Теорема 1. *(Необходимо условие за екстремум). Ако f(x) е диференцируема в точката x_0 и притежава екстремум в x_0, то $f'(x_0)=0$.*

Геометрически това означава, че в точката с абсциса $x = x_0$ допирателната към графиката на f(x) е успоредна на абсцисната ос.

Теорема 2. (*Достатъчно условие за екстремум). Нека функцията f(x) е дефинирана и притежава първа и втора производна в околност на точката x_0, като $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$. Ако $f''(x_0)<0$, функцията f(x) има локален максимум в точката x_0, а ако $f''(x_0)>0$, функцията има локален минимум в точката x_0.*

196. Намерете екстремумите на функцията

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$; б) $g(x) = \sin^2 x + \cos x$, ако $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Решение: а) Дефиниционната област на функцията е всяко $x\in(-\infty,\infty)$. Първата и втората производни са

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3), \qquad f''(x) = 12x - 6.$$

Корените на уравнението $f'(x)=0$ са $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. От $f''(-2) = -30 < 0$ следва, че за x = -2 функцията има локален максимум, който е равен на $f_{\max} = f(-2) = 64$. От $f''(3) = 30 > 0$ следва, че функцията има локален минимум за x = 3, който е равен на $f_{\min} = f(3) = -61$.

б) Определяме първата и втората производна на функцията:

$$g'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1), \qquad g''(x) = 2\cos 2x - \cos x.$$

Корените на тригонометричните уравнения $\sin x = 0$ и $\cos x = \frac{1}{2}$, които са от интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ са x = 0 и x = $\pm\frac{\pi}{3}$. От $g^{//}(0) = 1 > 0$ установяваме локален минимум, който е равен на g_{min}= g(0) = 1. От $g^{//}(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} < 0$ установяваме локален максимум, който е равен на g_{max} = g(- $\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$ и от $g^{//}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} < 0$ установяваме втори локален максимум, който е равен на $g_{max} = g(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$.

197. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, \quad \text{когато} \quad x \in [-4, 6].$$

Решение: Определяме първата и втората производна:

$$f^{/}(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3); \qquad f^{//}(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Корените на уравнението $f^{/}(x) = 0$ са x = -1 и x = 3 и те принадлежат на дефиниционния интервал [-4, 6]. Понеже $f^{//}(-1) = -12 < 0$, $f^{//}(3) = 12 > 0$, то $f_{max} = f(-1) = 6$, f_{min} = f(3) = -26.

Изчисляваме функционалните стойности за краищата на дефиниционния интервал: f(-4) = -75 и f(6) = 55. Това показва, че когато $x \in [-4, 6]$, най-малката стойност на функцията е равна на -75, а най-голямата стойност на функцията е равна на 55.

*****

Има случаи, в които втората производна се анулира за същите стойности на x, за които се анулира и първата производна. Тогава се използва следната

Обобщена теорема. *Нека в един интервал, съдържащ точката x_0 функцията f(x) има непрекъснати производни до n-ти ред, като*

$$f^{/}(x_0) = f^{//}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ако n е четно число, то в точката x_0 функцията f(x) има екстремум, който е локален минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локален максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Ако n е нечетно число, то в точката x_0 функцията f(x) има инфлексна точка (вж. 4.7.5.).

198. Намерете екстремумите на функцията

а) $y = (x-1)^5$; б) $f(x) = (2x+1)^4$.

Решение: а) От $y^{/} = 5(x-1)^4 = 0$ определяме $x_0 = 1$.

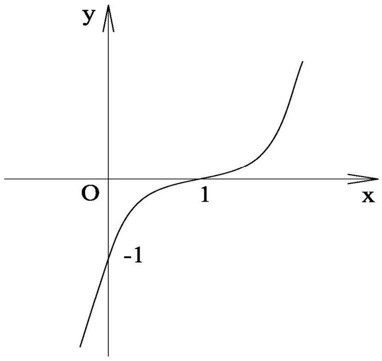
Производните от по-висок ред са

$$y^{//}(x) = 20(x-1)^3; \quad y^{///}(x) = 60(x-1)^2; \quad y^{IV}(x) = 120(x-1); \quad y^{V}(x) = 120 \neq 0.$$

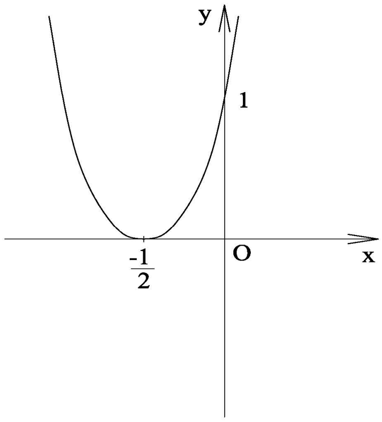
Тъй като

$$y^{/}(1) = y^{//}(1) = y^{///}(1) = y^{IV}(1) = 0, \quad y^{V}(1) = 120 \neq 0,$$

според последната теорема тази функция няма екстремум (тя има инфлексия, вж. 4.7.5.), фиг. 29.



фиг. 29



фиг. 30

б) От уравнението $f'(x) = 8(2x + 1)^3 = 0$ намираме $x_0 = -\frac{1}{2}$. За производните на функцията

$$f''(x) = 48(2x+1)^2, \quad f'''(x) = 192(2x+1), \quad f^{IV}(x) = 384$$

е в сила

$$f'(-\frac{1}{2}) = f''(-\frac{1}{2}) = f'''(-\frac{1}{2}) = 0, \quad f^{IV}(-\frac{1}{2}) = 384 > 0,$$

следователно налице е локален минимум, който е равен на

$$f_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = 0, \text{ фиг. 30.}$$

*****

Когато намирането на втората производна на една функция е свързано с технически трудности се използва следната

Теорема. *Нека f(x) е непрекъсната функция в точката x_0 и в интервал, съдържащ x_0 е диференцируема (в точката x_0 функцията може и да няма производна). Ако първата производна $f'(x)$ има различни знаци за стойности на x в ляво и в дясно от x_0, то в x_0 f(x) има екстремум. Ако промяната на знака на $f'(x)$ е от плюс в минус, в x_0 функцията f(x) има локален максимум, а ако промяната на знака на $f'(x)$ е от минус в плюс, в x_0 функцията f(x) има локален минимум.*

199. Намерете екстремумите на функцията

а) $y = (x + 2)^6 e^{-x}$; б) $y = \sqrt[5]{x^3 - 2x^2 + x}$.

Решение: а) Функцията е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Първата й производна е равна на

$$y' = 6(x + 2)^5 e^{-x} - (x + 2)^6 e^{-x} = e^{-x}(x + 2)^5(4 - x).$$

От уравнението $y' = 0$ намираме точките $x = -2$ и $x = 4$, с които дефиниционният интервал се разделя на три подинтервала: $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, $(4, \infty)$, във всеки от които първата производна има постоянен знак. Заместваме в първата производна със стойности на x от всеки от тези подинтервали:

$$y'(-3) < 0, \quad y'(0) > 0, \quad y'(5) < 0.$$

От последната теорема следва, че $y_{\min} = y(-2) = 0$, $y_{\max} = y(4) = 6^6 e^{-4}$.

б) Дефиниционната област е $x \in (-\infty, \infty)$. Първата производна е равна на

$$y'(x) = \frac{3(x-\frac{1}{3})(x-1)}{5\sqrt[5]{(x^3-2x^2+x)^4}}.$$

Разглеждаме стойностите на аргумента $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$. За $x = 0$ и $x = 1$ първата производна не съществува. Определяме знаците на първата производна във всеки от подинтервалите

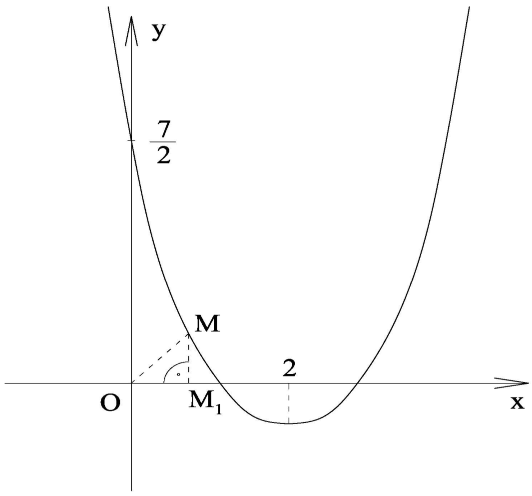
$(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, 1)$, $(1, \infty)$:

$$y'(-1) > 0, \quad y'(\frac{1}{4}) > 0, \quad y'(\frac{2}{3}) < 0, \quad y'(2) > 0.$$

Според последната теорема за $x = 0$ функцията няма екстремум, за $x = \frac{1}{3}$ е налице локален максимум, равен на $y_{\max} = y(\frac{1}{3}) = \sqrt[5]{\frac{4}{27}}$, а за $x = 1$ – локален минимум, равен на

$y_{\min} = y(1) = 0.$

200. Намерете най-малкото разстояние от началото на координатната система до точка от графиката на функцията $y = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$.



фиг. 31

Решение: Нека M е точката от графиката на дадената парабола, до която разстоянието от началото на координатната система е най-малко, фиг. 31. Нека точката M_1 е ортогоналната проекция на M върху Ox. Координатите на точката M са $M(x,\ x^2 - 4x + \frac{7}{2})$. От Питагоровата теорема за триъгълника OMM_1 имаме

$$OM^2 = OM_1^2 + MM_1^2 = x^2 + (x^2 - 4x + \frac{7}{2})^2 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + \frac{49}{4}.$$

Ако се въведе функцията

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + \frac{49}{4}},$$

трябва да се намери най-малката стойност на f(x). Първата производна е равна на

$$f^{/}(x) = \frac{2(x^3 - 6x^2 + 12x - 7)}{\sqrt{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 28x + \frac{7}{2}}}.$$

Тъй като $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = (x - 1)(x^2 - 5x + 7)$, то уравнението $f^{/}(x) = 0$ има само един реален корен $x = 1$. Лесно се установява, че $f^{/}(x) < 0$, когато $x < 1$ и $f^{/}(x) > 0$, когато $x > 1$, така че за $x = 1$ f(x) има локален минимум, който съвпада с най-малката стойност на тази функция, тъй като екстремумът е единствен. И така, търсеното най-малко разстояние OM е равно на

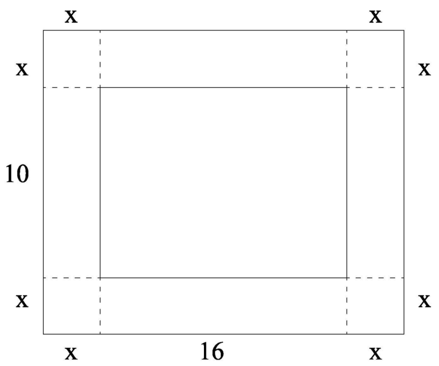
$$f_{\min} = f(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

201. От правоъгълен картон с размери 16 см и 10 см трябва да се изрежат от ъглите четири квадрата, така че от останалата част да се направи паралелепипедна кутия, която да има най-голям обем. Намерете този най-голям обем.

Решение: С x означаваме дължината на квадрата, който трябва да се изреже от всеки ъгъл на правоъгълния картон, фиг. 32. Тогава основата на кутията ще има лице $(16 - 2x)(10 - 2x)$, а обемът на паралелепипеда е равен на

$$V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x, \quad x \in (0, 5).$$

Производните на тази функция са $V^{/}(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x^2 - 26x + 40) = 12(x-2)(x-\frac{20}{3})$ и $V^{//}(x) = 8(3x-13)$. От корените на уравнението $V^{/}(x) = 0$ само $x = 2$ принадлежи на дефиниционния интервал. $V^{//}(2) = -56 < 0$, така че V(x) има локален максимум, който съвпада с най-голямата стойност на функцията, защото в интервала (0, 5) има само един екстремум. Тази най-голяма стойност е равна на $V_{max} = V(2) = 144$ см^3.



фиг. 32

202. Дадена е функцията $f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$. Намерете:

а) най-малката и най-голямата стойност на f(x);

б) уравнението на допирателната към f(x) в точката, в която графиката пресича ординатната ос.

Решение: а) Дефиниционната област на функцията е всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Първата производна е равна на $f^{/}(x) = \frac{2(5x^2 + 11x + 2)}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$. Функцията f(x) е непрекъсната и ограничена в целия дефиниционен интервал. Екстремумите й са $f_{min} = f(-\frac{1}{5}) = \frac{5}{2}$ и $f_{max} = f(-2) = 7$. Определяме границата

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(20+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{20}{3}.$$

От всичко това следва, че най-малката стойност на функцията е равна на $\frac{5}{2}$, а най-голямата й стойност е равна на 7, т. е. най-малката стойност съвпада с локалния минимум, а най-голямата стойност съвпада с локалния максимум.

б) Точката, в която графиката на функцията пресича ординатната ос е (0, 3). Ъгловият коефициент на допирателната е равен на $f'(0) = 4$, а уравнението на търсената допирателна е $4x - y + 3 = 0$.

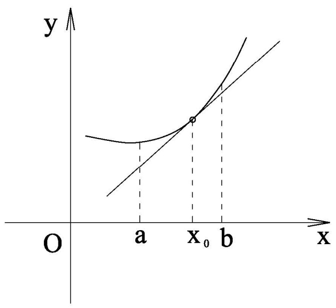
4.7.5. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексна точка

Нека функцията f(x) е дефинирана в интервал съдържащ точката x_0 и в x_0 тя е диференцируема и има допирателна.

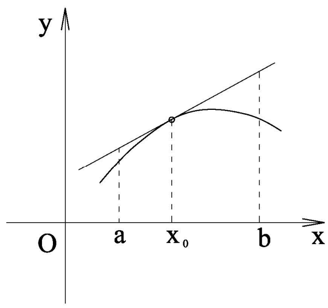
Функцията се нарича **изпъкнала (вдлъбната)** *в точката x_0 ,ако в интервал съдържащ x_0 графиката й е разположена* **над (под)** *нейната допирателна.*

Функцията се нарича **изпъкнала (вдлъбната)** *в интервала (a, b), ако тя е изпъкнала (вдлъбната) във всяка точка от този интервал, фиг. 33 и 34.*

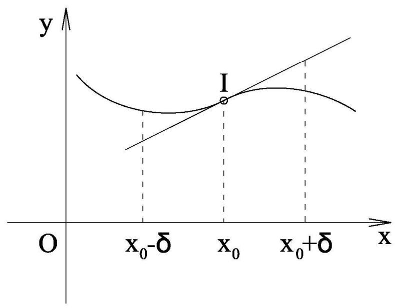
Точката с абсциса x_0 се нарича **инфлексна точка** *на f(x), ако съществува интервал съдържащ x_0 , в който графиката на f(x) е разположена в двете полуравнини, ограничени от допирателната към f(x) в точката $I[x_0 , f(x_0)]$, фиг. 35.*



фиг. 33



фиг. 34



фиг. 35

Теорема. *Ако в интервал, съдържащ точката x_0 функцията f(x) е два пъти диференцируема и $f''(x_0) \neq 0$, то:*

1. *когато $f''(x_0) > 0$, f(x) е изпъкнала в точката x_0 ;*
2. *когато $f''(x_0) < 0$, f(x) е вдлъбната в точката x_0 .*

203. Намерете интервалите на изпъкналост и интервалите на вдлъбнатост на функцията

$$y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 51.$$

Определете координатите на нейните инфлексни точки.

Решение: Първите две производни на функцията са

$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 24x \ ; \qquad y'' = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x + 2)(x - 1).$$

Както функцията, така и първата и втората ѝ производни са дефинирани за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Корените на уравнението $y'' = 0$ са $x = -2$ и $x = 1$. Те разделят дефиниционния интервал на трите подинтервала: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, \infty)$. Във всеки от тях втората производна има постоянен знак. Определяме знака на y'' във всеки от тези подинтервали:

$$y''(-3) = 48 > 0, \quad y''(0) < 0, \quad y''(3) = 120 > 0.$$

Според казаното по-горе, когато $x \in (-\infty, -2)$ и $x \in (1, \infty)$ функцията е изпъкнала, а когато $x \in (-2, 1)$ функцията е вдлъбната.

Инфлексните точки са $I_1(-2, 3)$ и $I_2(1, 42)$.

204. Определете уравнението на допирателната, минаваща през инфлексната точка на функцията $y = \dfrac{x+8}{\sqrt{x+5}}$.

Решение: Дефиционната област на функцията е $x \in (-5, \infty)$. Двете производни са

$$y' = \frac{x+2}{2\sqrt{(x+5)^3}}, \qquad y'' = \frac{4-x}{4\sqrt{(x+5)^5}}.$$

Инфлексната точка има координати (4, 4). Ъгловият коефициент на допирателната е равен на $y'(4) = \dfrac{1}{9}$. Уравнението на допирателната, минаваща през инфлексната точка има уравнение $x - 9y + 32 = 0$.

4.7.6. Асимптоти

Определение. *Асимптота на функцията f(x) се нарича правата, за която е в сила, че разстоянието от една движеща се точка по графиката на f(x) до тази права клони към нула при неограниченото отдалечаване на тази точка от координатното начало.*

Асимптотите на дадена функция могат да бъдат **вертикални, хоризонтални и наклонени.**

Вертикална асимптота

Ако съществува крайна стойност a на независимата променлива x, така че когато x клони към a, функцията да клони към +∞ или към -∞, т. е. ако е в сила

(1) $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$

то функцията y = f(x) има вертикална асимптота и тя има уравнение x = a.

205. Намерете вертикалната асимптота на функцията

а) $y = \dfrac{5x+1}{3x-6}$; б) $y = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

Решение: а) От границите

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{5x+1}{3x-6} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{5x+1}{3x-6} = +\infty$$

заключаваме, че функцията има вертикална асимптота и нейното уравнение е х = 2.

б) Функцията у = $\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ няма вертикална асимптота, защото не съществува число а, за което да е в сила границата (1). За всяка крайна стойност на аргумента, стойността на функцията е крайна, тъй като $x^2 + 1 \geq 1$ за всяко х.

Хоризонтална асимптота

Ако при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$ границата на функцията f(x) е число, т. е. ако е в сила

(2) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b, \quad b - \text{ число,}$$

то функцията f(x) има хоризонтална асимптота и нейното уравнение е у = b.

206. Намерете хоризонталната асимптота на функцията

а) $y = \dfrac{6x^3-5x+7}{2x^3+8x^2-3}$; б) $y = \dfrac{5x^3-4x+6}{3x+2}$.

Решение: а) От границата

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^3-5x+7}{2x^3+8x^2-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(6-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3})}{x^3(2+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^3})} = 3$$

заключаваме, че функцията има хоризонтална асимптота и нейното уравнение е у = 3.

б) Функцията няма хоризонтална асимптота, защото

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3-4x+6}{3x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(5x^2-4+\frac{6}{x})}{x(3+\frac{2}{x})} = \infty,$$

т. е. не е изпълнена границата (2).

Наклонена асимптота

Ако за функцията f(x) са изпълнени двете условия:

(3) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad k-\textit{число},$$

(4) $$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=n,\ \ n-\textit{ число},$$

то f(x) има наклонена асимптота и нейното уравнение е y = kx+ n.

Забележка. *Асимптотите на дадена функция могат да бъдат различни при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$, вж. задача 208.*

207. Да се намери наклонената асимптота на функцията

а) $y=\dfrac{8x^3-7x^2+6}{4x^2+3}$; *б)* $y=\dfrac{3x^4+5}{x^2+2}$;

Решение: а) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-7x^2+6}{4x^3+3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(8-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^3})}{x^3(4+\frac{3}{x^2})}=2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{8x^3-7x^2+6}{4x^2+3}-2x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-7x^2+6-8x^3-6x}{4x^2+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(-7-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2(4+\frac{3}{x^2})}=-\frac{7}{4}.$$

Условията (3) и (4) са изпълнени. Наклонената асимптота има уравнение

$$y=2x-\frac{7}{4}\quad\text{или}\quad 8x-4y-7=0.$$

б) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4+5}{x^3+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(3x+\frac{5}{x^3})}{x^3(1+\frac{2}{x^2})}=\pm\infty.$$ Не е изпълнено условието (3). Функцията няма наклонена асимптота.

208. Намерете всички асимптоти на функцията

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{3x-2}$; б) y = arctg x.

Решение: а) Квадратният тричлен x^2-x+5 има положителна стойност за всяка стойност на x. Дефиниционната област на функцията е всяко $x\neq\dfrac{2}{3}$. От границите

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}-0}y=-\infty,\qquad\lim_{x\to\frac{2}{3}+0}y=+\infty$$

следва, че правата с уравнение $x = \frac{2}{3}$ е вертикална асимптота. От границите

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(3-\frac{2}{x})} = \pm\frac{1}{3}$$

следва, че правите с уравнения $y = -\frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{3}$ са хоризонтални асимптоти съответно при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Границата

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(3x-2)} = 0$$

показва, че наклонените асимптоти съвпадат с хоризонталните асимптоти.

б) Дефиниционната област на функцията е всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Тъй като arctg $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, функцията е ограничена за всяка крайна стойност на x. Това показва, че тя няма вертикална асимптота. От границата

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x arctgx) = +\infty$$

следва, че функцията няма хоризонтална асимптота.

Намираме границите

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2} = k_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} = k_2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x\to-\infty} [x(arctgx + \frac{\pi}{2})] =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{arctgx + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1 = n_1,$$

Функцията има две наклонени асимптоти:

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \quad и \quad y = \frac{\pi}{2}x - 1$$

съответно при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

209. Намерете всички асимптоти на функциите

а) y = $\ln(e + \dfrac{5}{x-4})$; $\quad$ *б)* $y = (x+3)e^{\frac{2}{x+3}}$; $\quad$ *в)* $y = \dfrac{\ln x + 3x^2 + x + 1}{x-2}$.

Отг.: а) Вертикални асимптоти: x = 4 и x = $4 - \dfrac{5}{e}$;

хоризонтална асимптота: y = 1.

Решение: б) Дефиниционната област е всяко $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,\infty)$. Представяме функцията във вида $y = \dfrac{e^{\frac{2}{x+3}}}{\frac{1}{x+3}}$ и по правилото на Лопитал получаваме

$$\lim_{x\to-3} y = \lim_{x\to-3} \frac{e^{\frac{2}{x+3}} . \frac{-2}{(x+3)^2}}{\frac{-1}{(x+3)^2}} = \infty,$$

което показва, че функцията има вертикална асимптота с уравнение x = -3.

От границите

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} [(x+3)e^{\frac{2}{x+3}}] = \pm\infty$$

следва, че функцията няма хоризонтална асимптота.

Намираме последователно

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} [(1+\frac{3}{x})e^{\frac{2}{x+3}}] = 1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y - x) = \lim_{x\to\pm\infty} [x(e^{\frac{2}{x+3}} - 1) + 3e^{\frac{2}{x+3}}] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{2}{x+3}} - 1}{\frac{1}{x}} + 3 \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{2}{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{2}{x+3}} . \frac{-2}{(x+3)^2}}{-\frac{1}{x^2}} + 3 = 2 + 3 = 5.$$

Наклонената асимптота на функцията има уравнение y = x + 5.

в) Дефиниционната област е $x \in (0,2) \cup (2,\infty)$. От границите

$$\lim_{x\to0} y = +\infty, \quad \lim_{x\to2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to2+0} y = +\infty$$

установяваме, че правите с уравнения x = 0 и x = 2 са вертикални асимптоти.

Границата

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + 6x + 1}{1} = +\infty$$

показва, че функцията няма хоризонтална асимптота.

Определяме последователно границите

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+3x^2+x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+6x+1}{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}+6}{2}=3;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-3x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+7x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+7}{1}=7.$$

Наклонената асимптота има уравнение y = 3x +7.

4.7.7. Изследване изменението на функция и построяване на графиката й

За да се добие пълна и вярна картина за изменението на една функция и да се построи графиката й може да се използва следната последователност за намиране на нейните елементи:

а) дефиниционна област;
б) граници в краищата на дефиниционните интервали;
в) интервали на растене и намаляне;
г) екстремуми;
д) интервали на вдлъбнатост и изпъкналост;
е) инфлексни точки;
ж) асимптоти;
з) таблица, в която се попълват получените резултати.

В зависимост от особеностите на изследваната функция някои от цитираните точки в посочената последователност могат да се изпускат или разменят. В повечето случаи е удобно да се намират някои конкретни точки, например пресечните точка на графиката с координатните оси.

210. Да се изследва и построи графиката на функцията

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}.$$

Решение: Дефиниционната област е всяко $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$; x = 2 е точка на прекъсване.

Намираме границите на функцията в краищата на дефиниционните интервали:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x-5+\frac{7}{x})}{x(1-\frac{2}{x})}=\pm\infty;$$

$$\lim_{\substack{x=2-\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to0}}f(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(2-\varepsilon)^2-5(2-\varepsilon)+7}{2-\varepsilon-2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1+\varepsilon+\varepsilon^2}{-\varepsilon}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x=2+\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}} \text{f(x)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(2+\varepsilon)^2-5(2+\varepsilon)+7}{2+\varepsilon-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon} = +\infty.$$

От последните две граници следва, че правата с уравнение $x = 2$ е вертикална асимптота.

Първата производна на функцията е равна на

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}.$$

Уравнението $f'(x) = 0$ има корени $x = 1$ и $x = 3$. Когато $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ $f'(x) > 0$, а когато $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$ $f'(x) < 0$. Това показва, че функцията има локален максимум за $x = 1$ и локален минимум за $x = 3$, като

$$f_{max} = f(1) = -3, \quad f_{min} = f(3) = 1.$$

Втората производна на функцията е равна на

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Уравнението $f''(x) = 0$ няма корени, следователно функцията няма инфлексни точки. Когато $x \in (-\infty, 2)$ имаме $f''(x) < 0$ и функцията е вдлъбната, а когато $x \in (2, \infty)$ имаме $f''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала.

При определяне на наклонената асимптота трябва да се намерят границите

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = 1 = k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7-x^2+2x}{x-2} =$$

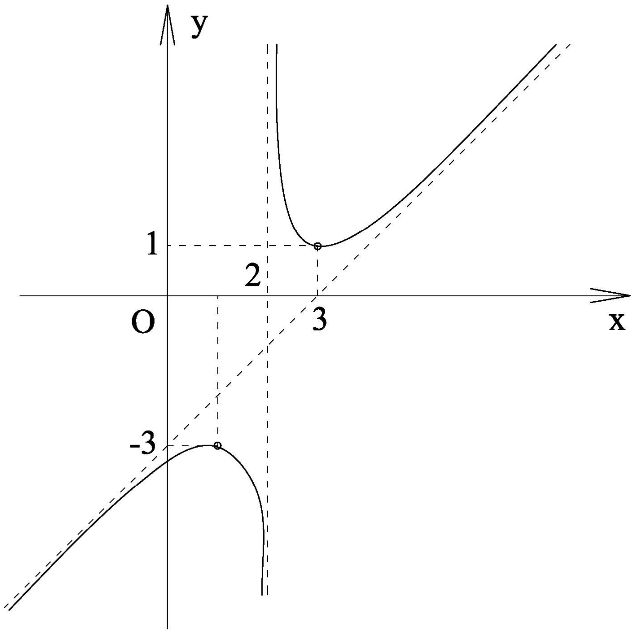
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+7}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(-3+\frac{7}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = -3 = n.$$

Правата с уравнение $y = x - 3$ е наклонена асимптота.

Числителят на функцията f(x) приравняваме на нула: $x^2 - 5x + 7 = 0$. Това уравнение няма реални корени, следователно графиката на функцията не пресича абсцисната ос. Пресечната точка с ординатната ос е точката $(0, -\frac{7}{2})$.

Получените резултати попълваме в таблицата. Графиката на функцията е построена на фиг. 36.

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
f(x)	$-\infty$ ↗	$-\frac{7}{2}$ ↗	-3 max ↘	$-\infty$ ¦ $+\infty$ ↘	1 min ↗	$+\infty$
f'(x)	+	+	0 -	¦ -	0 +	+
f''(x)	-	-	-	- ¦	+	+



фиг. 36

211. Изследвайте и постройте графиката на функцията

$$y = \frac{10x^2 - 13x + 10}{x^2 + 1}.$$

Решение: Дефиниционната област на функцията е всяко $x \in (-\infty, \infty)$.

Границите в краищата на дефиниционния интервал са

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{10x^2 - 13x + 10}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(10 - \frac{13}{x} + \frac{10}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = 10.$$

Оттук разбираме, че правата с уравнение $y = 10$ е хоризонтална асимптота на функцията.

Първата производна е равна на

$$y' = \frac{13(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Уравнението $y' = 0$ има корени $x = \pm 1$. Когато $x \in (-\infty, -1)$ и $x \in (1, \infty)$ функцията е растяща, защото $y' > 0$, а когато $x \in (-1, 1)$ функцията е намаляваща, защото $y' < 0$. Това показва, че за $x = -1$ е налице локален максимум, а за $x = 1$ е налице локален минимум, като

$$y_{max} = y(-1) = \frac{33}{2} = 16{,}5, \quad y_{\min} = y(1) = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Функцията е непрекъсната и ограничена за всяко $x \in (-\infty, \infty)$, затова най-голямата стойност на функцията съвпада с локалния й максимум, а най-малката стойност на функцията съвпада с локалния й минимум.

Втората производна е равна на

$$y'' = \frac{-26x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Корените на уравнението $y''=0$ са $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$. Инфлексните точки са

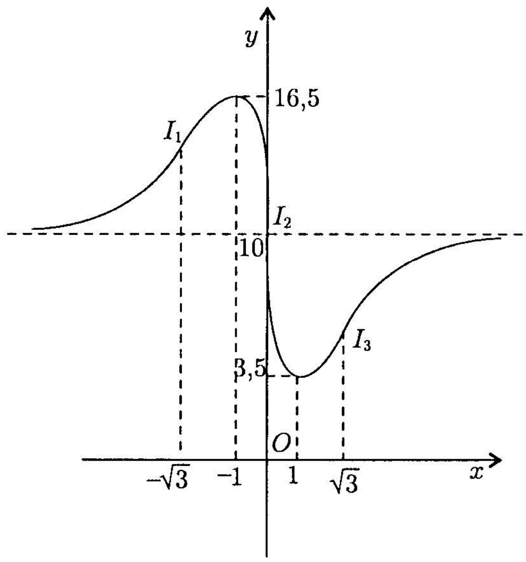
$$I_1(-\sqrt{3},\ 10+\frac{13\sqrt{3}}{4}),\qquad I_2(0,10),\qquad I_3(\sqrt{3},\ 10-\frac{13\sqrt{3}}{4}),$$

като $10+\dfrac{13\sqrt{3}}{4}\approx 15{,}6;\quad 10-\dfrac{13\sqrt{3}}{4}\approx 4{,}4.$

Освен хоризонталната асимптота $y = 10$ функцията няма други асимптоти (проверете!).

Получените резултати са нанесени в таблицата, а графиката на функцията е построена на фиг. 37.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
y	10	$\nearrow$	$10+\frac{13\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{33}{2}$ max	$\searrow$	10	$\searrow$	$\frac{7}{2}$ min	$\nearrow$	$10-\frac{13\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	10
y'		+		+	0	−		−	0	+		+	
y''		+	0		−		0		+		0	−	



фиг. 37

212. Да се изследва и начертае графиката на функцията

$$y = x + \ln(x^2 - 1).$$

Решение: Дефиниционната област се състои от интервалите $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. В интервала [-1, 1] функцията не е дефинирана.

Намираме границите в краищата на дефиниционните интервали:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}[x+\ln(x^2-1)] = \pm\infty,$$

$$\lim_{\substack{x=-1-\varepsilon \\ \varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} [x + \ln(x^2 - 1)] = \lim_{\varepsilon\to 0} [-1-\varepsilon + \ln(2\varepsilon + \varepsilon^2)] = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x=1+\varepsilon \\ \varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} [x + \ln(x^2 - 1)] = \lim_{\varepsilon\to 0} [1+\varepsilon + \ln(2\varepsilon + \alpha^2)] = -\infty.$$

Това показва, че правите с уравнения $x = -1$ и $x = 1$ са вертикални асимптоти.

Първата производна на функцията е равна на

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}.$$

Тя се анулира за $x = -1 - \sqrt{2}$ *и* $x = -1 + \sqrt{2}$. Тъй като $x = -1+\sqrt{2}$ не принадлежи на дефиниционната област, само $x = -1-\sqrt{2}$ е екстремална точка. Когато $x \in (-\infty, -1-\sqrt{2})$ $y' > 0$, а когато $x \in (-1-\sqrt{2},\ -1)$ $y' < 0$. За $x = -1-\sqrt{2}$ функцията има локален максимум, който е равен на

$$y_{max} = y(-1-\sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx -0{,}84.$$

Когато $x \in (1, \infty)$ е в сила $y' > 0$, затова в този интервал функцията е растяща.

Втората производна е равна на

$$y'' = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Тя е отрицателна за всяка стойност на x, затова функцията е вдлъбната за всяка стойност на аргумента.

От границите

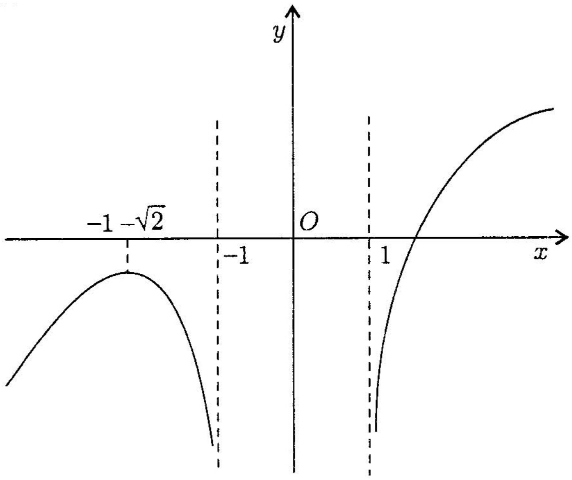
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} [1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}] = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2 - 1) = \infty$$

се разбира, че функцията няма наклонена асимптота.

Получените резултати са нанесени в таблицата. Графиката на функцията е построена на фиг. 38.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$ |		| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$		$-$	|		|	$+$	
y''			$-$		|		|	$-$	



Фиг. 38

213. Изследвайте и постройте графиката на функцията

а) $y = x^4 + 2x^3 + 3$; б) $y = x - \ln(x+1)$;

в) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$; г) $y = \dfrac{3x-2}{x^2}$;

д) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; е) $y = x^2 e^{-x}$;

ж) $y = 3\sqrt[3]{x} - x + 2$; з) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$.

Отг.: а) $x \in (-\infty, \infty)$; $\min(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{21}{16})$; инфлексни точки (-1, 2) и (0, 3).

б) $x \in (-1, \infty)$; $\min(0, 0)$; вертикална асимптота x = -1.

в) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; min(3, 4), max(1, 0); асимптоти x= 2 и y = x.

г) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $\max(\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{8})$; инфлексна точка (2, 1);

асимптоти x = 0 и y = 0.

д) $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; $y' > 0$ за всяко x; асимптоти x = -1 и y = 1.

е) $x \in (-\infty, \infty)$; $\min(0, 0)$, $\max(2, 4e^{-2})$; инфлексни точки

$[2-\sqrt{2}, (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2}]$ и $[2+\sqrt{2}, (6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-2}]$;

хоризонтална асимптота y = 0 при $x \to \infty$.

ж) $x \in (-\infty, \infty)$; $\min(-1, 0)$, $\max(1, 4)$; инфлексна точка (0, 2).

з) $x \in (2, \infty)$; $\min(3, 2)$; инфлексна точка $(5, \dfrac{4}{\sqrt{3}})$; вертикална

асимптота x = 2.

Тест за самоподготовка

1. Дефиниционното множество на функцията

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{\ln(x+4)}$$

е:

а) [-3, 2); б) (-4, 4); в) $(-4, -3) \cup [2, \infty)$; г) $[-4, -3] \cup [2, \infty)$.

2. Първата производна на функцията

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 7})$$

е равна на

а) $3x^2 - x + 4$; б) $\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}$; в) $\frac{5x}{\sqrt{4x+1}}$; г) $2x^2 + x + 8$.

3. Уравнението на допирателната към графиката на функцията

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 2,$$

която минава през инфлексната й точка е:

а) x + 5y – 1 = 0; б) 2x – y + 7 = 0; в) 3x + y – 7 = 0; г) 3x + y + 1 = 0.

4. Границата

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}\right)$$

има стойност:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{3}$; в) 2; г) 3.

5. Наклонената асимптота на функцията

$$f(x) = \frac{6x^4 + 5x^3 - 7x + 3}{3x^3 + 2x + 1}$$

има уравнение:

а) 6x + 3y – 2 = 0; б) 2x + 6y – 1 = 0; в) 6x -3y + 5 = 0; г) 2x – 6y + 3 = 0.

6. Най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x^2 + 3}$$

е равна на:

а) $\frac{12}{7}$; б) $\frac{13}{6}$; в) 3; г) 4.

Литература

1. *Бонев, К., Лалова, Н., Иванова, А.* Математическо моделиране. Варна, Г. Бакалов, 1989.
2. *Киркоров, И., Бонев, К., Петков, Е.* Висша математика. София, Наука и изкуство, 1974.
3. *Минков, Н.* Курс по висша математика, т. I. София, Техника, 1961.
4. *Минорский, В.* Сборник задач по высшей математике. Москва, Физматгиз, 1961.
5. *Екимов, Ц., Николова, Ю., Дюкмеджиев, А.* Ръководство по линейна алгебра и линейно оптимиране, София, Университетско издателство "Стопанство", 1996.
6. *Екимов, Ц.* Висша математика, първа част. Перник, Кракра, 1997.
7. *Екимов, Ц.* Математически модели и методи. Перник, Кракра, 2000.
8. *Екимов, Ц.* Сборник с решени задачи по математика. София, Парадигма, 2004.