ТРЕТИ РАЗДЕЛ

МАТЕМАТИЧЕСКО ОПТИМИРАНЕ

Ключови понятия към трети раздел

Обща задача на математическото оптимиране
Графичен начин за решаване на оптимални задачи
Базисно решение
Симплекс метод
Начално базисно решение
Критерий за оптималност
Преход към по-добро решение
Метод на изкуствения базис
Дуалност в линейното оптимиране
Транспортна задача
Метод на потенциалите

3.1. Обща задача на линейното оптимиране. Свойства

След усвояване на материала от този раздел ще можете:

- **да решавате графично оптимални задачи с две неизвестни;**
- **да решавате оптимални задачи със симплекс метод;**
- **да намирате решенията на двойка дуални задачи;**
- **да решавате задачи от транспортен тип.**

Общата задача на линейното оптимиране се формулира по следния начин:
Да се намери минимумът или максимумът на функцията

(1) $$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ако участващите неизвестни изпълняват зависимостите

(2) $$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

(3) $$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Линейната функция Z(X) се нарича целева функция, системата (2) се нарича ограничителни условия, а (3) са условията за неотрицателност на участващите неизвестни.

По-кратко тази задача може да се запише във вида

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1 \div \text{m},$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1 \div n.$$

Матричният запис на задачата е

$$Z(X) = CX$$
$$AX = B$$
$$X \geq O,$$

където C, A, X и B са матриците

$$C = \| c_1 \ \ c_2 \dots c_n \|, \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \ \ a_{m2} \dots a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix} \right\|,$$

а O е нулевата матрица.

В някои задачи ограничителните условия (2) се задават със система линейни неравенства от вида

$$\left| \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{matrix} \right.$$

или система линейни неравенства от вида “ $\geq$ “. Ограничителните условия могат да съдържат едновременно уравнения и неравенства от двата вида. Понеже всяко неравенство се свежда до уравнение с прибавяне или изваждане на допълнителна неизвестна и освен това съществува директна връзка между решенията на системата неравенства и съответната й система уравнения (вж. теоремата в 2.10.), може да се приеме, че *общата задача на линейното оптимиране има вида* (1)-(3).

Решение (план, програма) на задачата (1)-(3) е всеки вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *чиито координати удовлетворяват (2) и (3).*

Оптимално решение е такова решение, за което целевата функция достига своя максимум (минимум).

Матрицата

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12},\dots,a_{1n} \\ a_{21} & a_{22},\dots,a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, \ \ ,a_{mn} \end{matrix} \right\| = \| A_1 \ \ A_2, \dots, A_n \|$$

се нарича *матрица на системата* (2) или *матрица на условията,* а нейните вектор стълбове A_1, A_2, … , A_n се наричат *вектори на условията.*

Определение. *Едно решение се нарича базисно, ако векторите на условията, които отговарят на положителните му координати, са линейно независими.*

Това определение е еквивалентно на определението за базисно решение, дадено в 2.9.

Едно базисно решение се нарича неособено (неизродено), ако броят на положителните му координати е равен на ранга на матрицата А. *Едно базисно решение се нарича особено (изродено), ако броят на положителните му координати е по-малък от ранга на матрицата А.*

Свойства на решенията на линейните оптимални задачи

1.Областта на решение на задачата (1)-(3) е изпъкнало множество. Върховете му отговарят на базисните решения на системата (2) и обратно – всяко базисно решение на (2) е връх в областта на решение.

2. Базисните решения на задачите (1)-(3) са краен брой, който не надхвърля

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

(вж.2.9.), където n е броят на неизвестните, а k е рангът на матрицата А.

3. Целевата функция Z(X) достига своя оптимум (минимум или максимум) в базисно решение на (2).

134. Нека G(X) е областта на решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 16 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$$

Дадени са петмерните вектори

$$X_1 = (0, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}),$$
$$X_2 = (0, 3, 2, 0, 0),$$
$$X_3 = (6, 0, 1, 1, 1),$$
$$X_4 = (7, 0, 1, 0, 0),$$
$$X_5 = (8, 0, 0, 0, 0),$$
$$X_6 = (19, -5, 0, 1, 0).$$

Установете кой от дадените вектори е решение в G(X) и кое от решенията е базисно.

Решение: Координатите на вектора X_1 са неотрицателни числа и удовлетворяват двете уравнения на системата. Векторите $A_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 5 \end{Vmatrix}$ и $A_5 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$ са линейно независими, затова X_1 е неособено (неизродено) базисно решение.

Векторът X_2 не удовлетворява второто уравнение, затова той не е решение в G(X).

X_3 удовлетворява всички ограничения, векторите A_1, A_3, A_4, A_5 са линейно зависими, следователно X_3 е небазисно решение.

X_4 е решение. Векторите A_1 и A_3 са линейно зависими, значи X_4 е небазисно решение.

X_5 е решение. A_1 има ненулеви координати, следователно е линейно независим вектор. X_5 има само една положителна координата, а рангът на матрицата А е равен на 2, което показва че X_5 е особено (изродено) базисно решение.

X_6 удовлетворява двете уравнения, но съдържа отрицателна координата, следователно не е решение в G(X).

3.2. Графичен начин за решаване на оптимални задачи в двумерния случай (n=2)

Определение. *Отсечка с краища точките* $A=(a_1, a_2)$ *и* $B=(b_1, b_2)$ *се нарича съвкупността от точки*

$$X = (1-к)A + кB,$$

където к е реално число от интервала [0, 1].

Векторът (точката) X се нарича *изпъкнала линейна комбинация на точките A и B.*

Това равенство изразява факта, че X "описва" отсечката AB, когато числото к приема всички стойности от интервала [0, 1].

135. Определете три точки от отсечката с краища A(2, 5) и B(4,-7), при $к=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{3}, k=\frac{2}{5}$.

Решение: $X_1=\frac{1}{2}(2,5)+\frac{1}{2}(4,-7)=(1,\frac{5}{2})+(2,-\frac{7}{2})=(3,-1)$; По аналогичен начин се определят и точките $X_2=(\frac{8}{3},1)$, $X_3=(\frac{14}{5},\frac{1}{5})$.

*****

Всяка оптимална задача с две неизвестни има вида

(1) $\min(\max)\{\, Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \,\}$

(2) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, $i = 1 \div m$,

(3) $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

където c_1, c_2, a_{i1}, a_{i2}, b_i, $i = 1\div m$, са известни числа, x_1 и x_2 са неизвестни, m е естествено число.

Всяка такава задача може да бъде решена по графичен начин в следната последователност:

1. *Построява се областта* $G(X) = (2) \cap (3)$.
2. *Построява се векторът* $C = (c_1, c_2)$, *който показва най-бързото нарастване на целевата функция Z(X).*
3. *Построява се правата* $q : c_1x_1+c_2x_2=0$, *която е перпендикулярна на вектора C.*
4. *Правата q се транслира (придвижва се успоредно) по посока на вектора C. При това движение първата обща точка на q с G(X) е точката, в която Z(X) има минимум, а последната обща точка на q с G(X) е точката, в която Z(X) има максимум.*
5. *Координатите на екстремните точки (точките, в които се получават минимумът и максимумът на целевата функция) се намират аналитично чрез уравненията на съответните пресекателни гранични прави.*

136. Намерете по графичен начин минимума и максимума на функцията

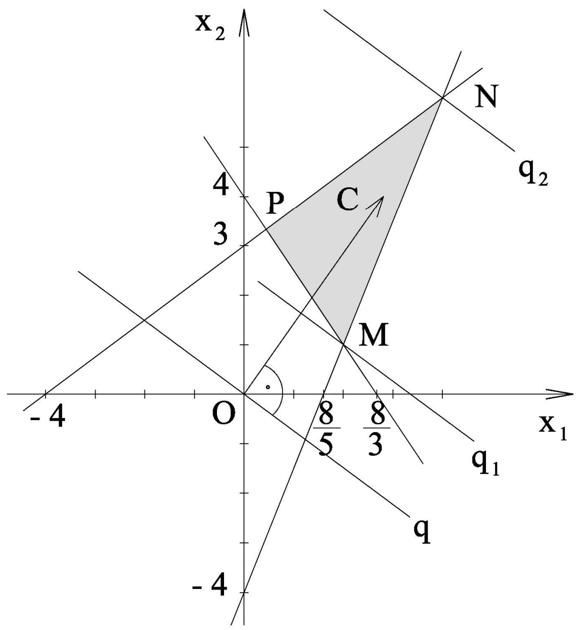
$$Z(X) = 3x_1 + 4x_2$$

при ограничителни условия

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ \end{array}\right.$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение: Спрямо правоъгълната координатна система x_1Ox_2 областта на решение G(X) на задачата е триъгълникът MNP, фиг. 14.



фиг. 14

Построяваме вектора C = (3, 4).

Придвижваме (транслираме) правата

$$q : 3x_1+4x_2=0$$

до положение q_1, когато тя допира областта G(X) в точката M(2,1), чиито координати се определят от системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 = 8. \end{array}\right.$$

Оптималното решение е X_{opt}=(2,1), $Z_{min} = Z(X_{opt})$= 3.2+4.1=10.

Когато правата q достигне положението q_2, в което тя допира G(X) в точката N(4,6) е достигнат максимума на целевата функция. Координатите на оптималното решение X_{opt}= (4,6) се определят от системата

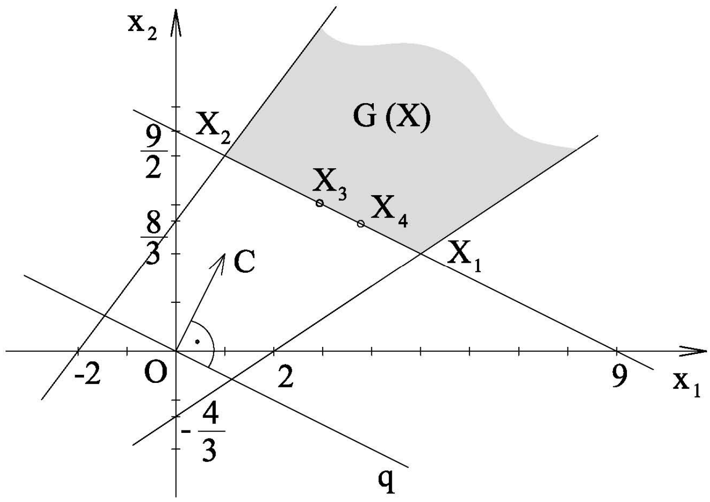
$$\left|\begin{array}{l} -3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 5x_1 - 2x_2 = 8. \end{array}\right.$$

$$Z_{max}=Z(X_{opt}) = 3.4+4.6=36.$$

137. Решете по графичен начин задачата

$$\min(\max)\{\ Z(X) = x_1 + 2x_2\ \}$$
$$\left|\begin{array}{l} 2x_1-3x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 4x_1-3x_2 \geq -8 \end{array}\right.$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение: Тук G(X) е неограничена област, фиг.15. Функцията Z(X) е неограничена отгоре, затова не съществува краен максимум ($Z_{max} \to \infty$).



фиг. 15

Векторът C = (1,2) е перпендикулярен на правата $x_1+2x_2=9$, затова минимумът се получава в двете оптимални решения $X_1=(5, 2)$ и $X_2=(1, 4)$, като

$$Z_{min}=Z(X_1)=Z(X_2)= 9.$$

В тази задача оптималните решения са безброй много. Всяко от тях може да се получи като изпъкнала линейна комбинация на двете базисни оптимални решения X_1 и X_2 чрез:

$$X = (1-к)X_1 + кX_2, \quad 0 \le к \le 1.$$

За к=0 и к=1 се получават базисните решения X_1 и X_2. На всяка стойност на параметъра к от интервала (0, 1) отговаря друго оптимално решение, което не е базисно. Например за $к=\frac{1}{2}$ се получава $X_3=(3, 3)$, за $к=\frac{1}{3}$ се получава $X_4= (\frac{11}{3}, \frac{8}{3})$. И в двата случая имаме $Z_{min}=Z(X_3)=Z(X_4)=9$.

138. Решете по графичен начин задачата

$$\min(\max)\{Z(X) = 3x_1+2x_2\}$$

$$\left|\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{array}\right.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Отг.: $X_{opt}=(1, 1)$, $Z_{min}=5$; $X_{opt}=(3,4)$, $Z_{max}=17$.

139. Да се намери оптималното решение на задачата

$$\max\{Z(X) = x_1 + 2x_2\}$$

$$\left| \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \end{array} \right.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

което отговаря на условието $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{25}{4}$.

Упътване: Оптималните базисни решения са две: X_1=(3,1) и X_2=(1,2), като Z_{min}=5. Търсеното оптимално решение X=(x_1,x_2) ще определим от системата

$$\left| \begin{array}{l} X = (1-k)X_1 + kX_2 \\ 0 \le k \le 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{25}{4}. \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме x_1=3-2к и x_2=1+к. С тези стойности заместваме в третото уравнение и за параметъра к получаваме к $=\dfrac{1}{2}$. Търсеното оптимално решение е $X_{opt} = (2, \dfrac{3}{2})$.

140. Фирма произвежда изделията A и B, като разполага с алуминий и електроенергия в количества съответно 320 ед. и 300 ед. Разходните норми от тези ресурси за единица изделие са дадени в таблицата. Печалбата от всяка единица от изделията A и B е съответно 36 лв. и 45 лв. Намерете производствена програма, която реализира максимална печалба.

	A	B
Al	4	3
EE	2	5

Решение: С вектора X=(x_1, x_2) изразяваме търсената производствена програма, като x_1 и x_2 са неизвестните количества, които трябва да се произведат съответно от изделията A и B.

Целевата функция

$$Z(X) = 36x_1 + 45x_2$$

изразява печалбата, която ще се реализира. Търси се максимумът на тази функция.

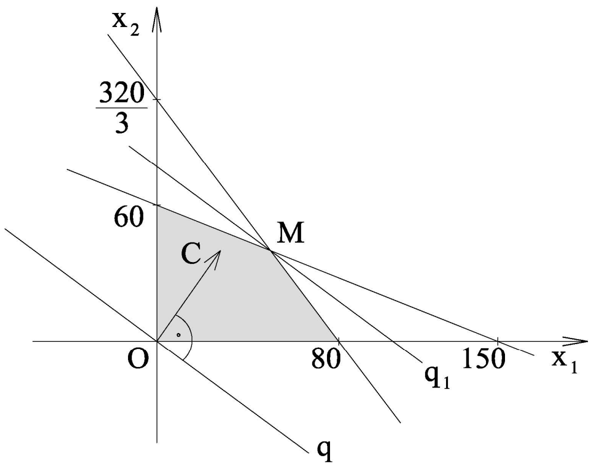
Ограничителните условия са

$$\begin{vmatrix} 4x_1 + 3x_2 \le 320 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 300 \end{vmatrix}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Областта на решение G(X) е построена на фиг. 16. Правата q : $36x_1+45x_2=0$ е транслирана до положението q_1. Координатите на точката M(50, 40) са определени от системата

$$\begin{vmatrix} 4x_1 + 3x_2 = 320 \\ 2x_1 + 5x_2 = 300. \end{vmatrix}$$



фиг. 16

От оптималното решение X_{opt} =(50, 40) се разбира, че трябва да се произведат съответно по 50 ед. и 40 ед. от изделията A и B. Максималната печалба ще бъде $Z_{max}=Z(X_{opt})$ = 36.50+45.40=3600 лв.

141. В птицеферма се отглеждат кокошки, като се използват два вида храни. Количествата витамини A, B, C, които се съдържат в една тегловна единица от всяка храна са дадени в таблицата. Минималните количества от витамините A, B, C, които

	I хр.	II хр.
A	4	1
B	1	1
C	1	3

трябва да се съдържат в седмичната дажба са съответно 8, 5, 9. Единица от всяка храна струва съответно 1 лв. и 2 лв. Да се намери най-евтиния седмичен режим на хранене.

Решение: Под режим на хранене ще разбираме двумерния вектор $X=(x_1, x_2)$, като x_1 и x_2 са търсените количества съответно от първата и от втората храна.

Цената на храната се изразява чрез целевата функция

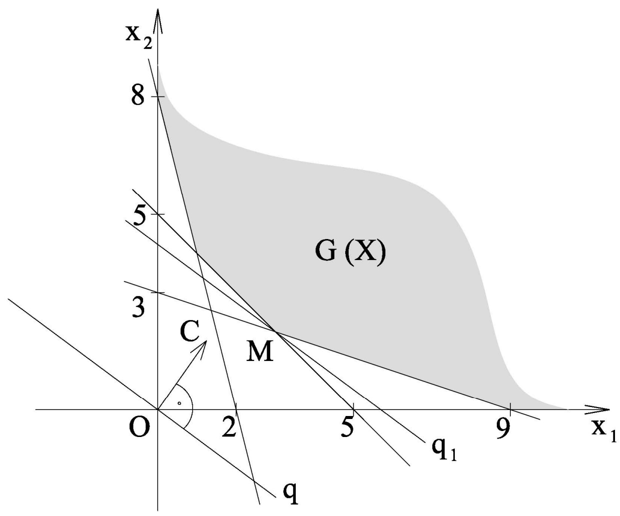
$$Z(X) = x_1 + 2x_2,$$

на която се търси минимумът.

Ограничителните условия са

$$\left|\begin{array}{l} 4x_1 + \ x_2 \geq 8 \\ \ x_1 + \ x_2 \geq 5 \\ \ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$



фиг. 17

Построява се областта на решение G(X), фиг. 17. Правата q : $x_1 + 2x_2 = 0$ е перпендикулярна на вектора C=(1, 2). Транслираното положение q_1 на правата q достига за първи път областта G(X) в точката M(3,2), чиито координати се определят от системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + \ x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{array}\right.$$

Оптималното решение Xopt = (3, 2) показва, че в седмичния режим на хранене трябва да се включат съответно по 3 ед. и 2 ед. от всяка храна. Тогава ще се получи най-ниската цена на храната $Z_{min}=Z(X_{opt}) = 3 + 2.2 = 7$ лв.

*****

Съществува един клас от оптимални линейни задачи, които съдържат повече от две неизвестни и въпреки това могат да се решат по графичен начин. В сила е следната

Теорема. *Ако една оптимална линейна задача отговаря на условието*

$$n - r \leq 2,$$

където n *е броят на неизвестните, а* r *е рангът на матрицата на системата, тази задача може да се сведе до задача с две неизвестни.*

От тази теорема следва, че ако в една задача е изпълнено горното условие тя може да се реши по графичен начин. Това ще приложим в следващата задача.

142. Да се намерят минимумът и максимумът на функцията

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + 12x_5$$

при ограничителни условия

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 13x_3 \qquad\qquad - 5x_5 = 15 \\ x_1 \qquad\quad - 5x_3 + 12x_4 - 19x_5 = 11 \\ \qquad x_2 - 4x_3 + \quad x_4 + 3x_5 = 8 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$$

Решение: Рангът на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 13 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -5 & 12 & -19 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

е равен на три, защото минорът от трети ред

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

който е образуван от коефициентите пред x_1, x_2 и x_4, е различен от нула. Условието

$$n - r = 5 - 3 = 2$$

е изпълнено.

Общото решение на системата уравнения при базисни неизвестни x_1, x_2, x_4 е

$$x_1 = 35 - 7x_3 - 5x_5$$
$$x_2 = 10 + 3x_3 - 5x_5$$
$$x_4 = -2 + x_3 + 2x_5.$$

С тези стойности на базисните неизвестни заместваме в целевата функция и получаваме $Z = 2x_3 + 4x_5 + 43$. Като се вземат под внимание условията за неотрицателност на неизвестните се стига до следната оптимална задача с две неизвестни:

$$\min(\max)\ \{Z(\overline{X}) = 2x_3 + 4x_5 + 43\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 7x_3 + 5x_5 \le 35 \\ 3x_3 - 5x_5 \ge -10 \\ x_3 + 2x_5 \ge 2 \\ x_3 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{array}\right.$$

Като се използва координатната система x_3Ox_5 се получава

$$\overline{X}_{1opt} = (0,1) \text{ и } \overline{X}_{2opt} = (2,0), \quad Z_{\min} = 47; \quad \overline{X}_{opt} = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}), \quad Z_{\max} = 62.$$

Като се замести в общото решение на системата с намерените стойности на x_3 и x_5, се получават оптималните решения на първоначалната задача:

$$X_{1opt}=(30, 5, 0, 0, 1) \text{ и } X_{2opt}=(21, 16, 2, 0, 0), Z_{\min}=47; \quad X_{opt}=(0, 0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{7}{2}), Z_{\max}=62.$$

143. Решете по графичен начин задачата

$$\min(\max)\{Z(X)= -3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 19 \end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5.$$

Упътване: Удобно е да използвате като базисни неизвестни x_2, x_3 и x_5.

Отг.: $X_{opt}=(5, 13, 0, 2, 0)$, $Z_{\min}= 8$; $X_{opt}=(0, 0, 13, 3, 13)$, $Z_{\max}= 41$. Вж. зад.142.

3.3. СИМПЛЕКС МЕТОД

Основната идея на този универсален метод за решаване на всяка линейна оптимална задача е като се намери едно *начално базисно решение,* да се премине през *по-добри базисни решения* и по най-рационален начин да се намери *оптималното решение на задачата или да се установи, че такова не съществува.*

Симплексният метод е изграден така, че всяка задача, която се решава с него преминава през три етапа.

I. *Намиране на начално базисно решение или установяване, че областта на решение на задачата е празно множество.*

II. *Критерий за оптималност – установяване дали дадено решение е оптимално или не е оптимално.*

III. *Намиране на подобрено базисно решение (подобряване на плана) или установяване , че целевата функция няма краен оптимум, т. е.* $Z \to \pm\infty$.

Нека задачата има вида

$$Z(X)=c_1x_1+c_2x_2+ \dots + c_nx_n$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 \quad\quad\quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad\quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div n,$$

където $b_i \geq 0$, $i = 1 \div m$.

Тази задача съдържа началното базисно решение

$$X_1 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots , 0).$$

Базисните неизвестни $x_1, x_2, \dots, x_m$, *имат стойности*

$$x_1= b_1,\ x_2= b_2,\ \dots,\ x_m= b_m,$$

а свободните неизвестни имат нулеви стойности:

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0.$$

Стойността на целевата функция, отговаряща на базисното решение X_1, е равна на

$$Z(X_1) = c_1x_1 + c_2x_2 +\dots+ c_mx_m,$$

където m-мерният вектор

$$C = (c_1, c_2, ..., c_m)$$

се нарича *целеви базисен вектор.*

Ако в една задача няма начално базисно решение, се прилага *симплекс метод с изкуствен базис,* който е разгледан в 3.4.

3.3.1. Критерий за оптималност

Във втория етап от симплексния метод трябва да се установи оптимално ли е или не е оптимално базисното решение, с което разполагаме от първия етап. Основна роля в това отношение играят величините

$$\Delta_j = C_Б A_j - c_j, \quad j = 1 \div n,$$

които се наричат *характеристики (индекси),* където A_j, $j = 1 \div n$, са векторите на условията на матрицата А (вж. 3.1.).

Критерият за оптималност се изразява в следното:

Когато се търси максимум

1. **Ако всички** $\Delta_j \geq 0$, $j = 1 \div n$, **решението е оптимално;**

2. **Ако съществува поне една** $\Delta_j < 0$, **решението не е оптимално.**

Когато се търси минимум

1. **Ако всички** $\Delta_j \leq 0$, $j = 1 \div n$, **решението е оптимално.**

2. **Ако съществува поне една** $\Delta_j > 0$**, решението не е оптимално.**

3.3.2. Преход към по-добро базисно решение (подобряване на плана)

Третият етап от симплексния метод се прилага, ако във втория етап е установено, че наличното решение не е оптимално.

Ако в задачата се търси максимум, за определеност приемаме, че $\Delta_{m+1} < 0$, а ако се търси минимум $\Delta_{m+1} > 0$. Това показва, че в подобреното решение X_2, новата базисна неизвестна ще бъде x_{m+1}.

Два са основните въпроси, чрез отговорите на които от наличното базисно решение X_1 се преминава към по-добро базисно решение X_2.

Първият въпрос е коя от базисните неизвестни в решението X_1 ще бъде заменена от новата базисна неизвестна x_{m+1}.

Вторият въпрос е кои са стойностите на координатите на новото решение X_2.

Най-напред ще разгледаме случая, когато векторът A_{m+1} притежава поне една положителна координата.

С θ се означава най-малкото от отношенията $\frac{b_i}{a_{i,m+1}}$, $i = 1 \div m$, където знаменателите на тези дроби са всички положителни координати на вектора A_{m+1}. Това най-малко отношение θ се приема за стойност на новата базисна неизвестна x_{m+1}, т. е.

$$x_{m+1} = \theta = \min\{\frac{b_i}{a_{i,m+1}}\},\ i = 1 \div m.$$

Ако за определеност приемем, че $\theta = \frac{b_1}{a_{1,m+1}}$, това показва, че x_{m+1} ще замени x_1 от предходния базис, т. е. в новото подобрено решение X_2 базисни неизвестни ще бъдат $x_2, x_3, ..., x_m$, x_{m+1}. С това се отговоря на първия въпрос.

Сега ще отговорим на втория въпрос. Стойностите на новите базисни неизвестни се получават така:

$$x_2 = b_2 - a_{2,m+1}.\frac{b_1}{a_{1,m+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = b_m - a_{m,m+1}.\frac{b_1}{a_{1,m+1}},$$

$$x_{m+1} = \theta = \frac{b_1}{a_{1,m+1}}.$$

В новото базисно решение X_2 свободни неизвестни са $x_1, x_{m+2}, \ldots, x_n$ и те имат нулеви стойности:

$$x_1 = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Чрез подобреното базисно решение

$$X_2 = (0, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, 0, \ldots, 0)$$

се получава новата подобрена функционална стойност $Z(X_2)$, която може да се пресметне по два начина:

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \Delta_{m+1}\theta = C_Б B.$$

От изложеното по-горе следва, че при минимум е в сила

$$Z(X_2) \le Z(X_1),$$

а при максимум е в сила

$$Z(X_2) \ge Z(X_1).$$

В случая, когато векторът A_{m+1} не притежава нито една положителна координата, целевата функция няма краен оптимум – областта е неограничена и тогава $Z \to \pm\infty$.

3.3.3. Алгоритъм на симплексния метод

Както приехме в 3.3. в задачата е налице начално базисно решение с базисни неизвестни $x_1, x_2, \dots, x_m$. Изчислителната процедура (алгоритъмът) за решаване на задачите със симплексния метод са изразява в последователност от 13 правила, които ще формулираме и успоредно с това ще решим един пример за по-лесно възприемане на изложението.

1^0. Задачата се внася в *първа симплексна таблица.* Първият й ред съдържа коефициентите пред неизвестните в целевата функция; този ред се нарича *целеви ред.*

$C_Б$	Б	B	c_1 x_1	c_2 x_2	$\dots$ $\dots$	c_m x_m	c_{m+1} x_{m+1}	$\dots$ $\dots$	c_n x_n
c_1	x_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$a_{2,m+1}$	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	....	....	....	....	....	....	....
c_m	x_m	b_m	0	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{mn}
		$C_Б B$	0	0	$\dots$	0	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_n

Първият стълб съдържа вектора $C_Б$. Той се нарича *целеви базисен стълб.* Вторият стълб съдържа базисните неизвестни; нарича се *стълб на базиса.* Третият стълб съдържа свободните членове на системата линейни уравнения. Чрез елементите на втория и третия стълб се получава непосредсвено началното базисно решение:

$$X_1 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0).$$

Следващите n стълба съдържат *векторите на условията* A_j, $j = 1 \div n$, от матрицата А. Последният ред на таблицата се нарича *индексен ред.* Той съдържа функционалната стойност $Z(X_1) = C_Б B$, както и характеристиките Δ_j, $j = 1 \div n$ (вж. 3.3.1.).

144. Да се реши със симплекс метод задачата

$$\max\{Z(X) = x_1 + 18x_2 - x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 2x_6\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x_2 + x_3 \qquad - 2x_5 \quad + x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + 3x_5 + 4x_6 = 5 \\ 7x_2 \qquad + x_4 + x_5 \quad + x_6 = 36 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 6.$$

Решение: Базисни неизвестни са x_3, x_1, x_5, а началното базисно решение е шестмерният вектор

$$X_1 = (5, 0, 6, 36, 0, 0).$$

$C_Б$	Б	B	1 x_1	18 x_2	-1 x_3	3 x_4	15 x_5	2 x_6
-1	x_3	6	0	3	1	0	-2	1
1	x_1	5	1	-1	0	0	$\boxed{3}$	4
3	x_4	36	0	7	0	1	1	1
		107	0	-1	0	0	-7	4
-1	x_3	$\frac{28}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	1	0	0	$\frac{11}{3}$
15	x_5	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	1	$\frac{4}{3}$
3	x_4	$\frac{103}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{22}{3}$	0	1	0	$\frac{-1}{3}$
		$\frac{356}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{-10}{3}$	0	0	0	$\frac{40}{3}$
18	x_2	4	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{11}{7}$
15	x_5	3	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{13}{7}$
3	x_4	5	$\frac{-17}{7}$	0	$\frac{-22}{7}$	1	0	$\frac{-83}{7}$
		132	$\frac{23}{7}$	0	$\frac{10}{7}$	0	0	$\frac{103}{7}$

Функционалната стойност, отговаряща на това решение е равна на

$$Z(X) = C_Б B = (-1)6 + 1.5 + 3.36 = 107.$$

За характеристиките намираме

$$\Delta_1 = C_Б A_1 - c_1 = -1.0 + 1.1 + 3.0 - 1 = 0,$$

$$\Delta_2 = C_Б A_2 - c_2 = -1.3 + 1(-1) + 3.7 - 18 = -1,$$

$$\Delta_3 = C_Б A_3 - c_3 = -1.1 + 1.0 + 3.0 - (-1) = 0,$$

$$\Delta_4 = C_Б A_4 - c_4 = -1.0 + 1.0 + 3.1 - 3 = 0,$$

$$\Delta_5 = C_Б A_5 - c_5 = -1(-2) + 1.3 + 3.1 - 15 = -7.$$

$$\Delta_6 = C_Б A_6 - c_6 = -1.1 + 1.4 + 3.1 - 2 = 4.$$

2^0 . *Прилага се критерият за оптималност, за да се установи дали началното базисно решение X_1 е оптимално.*

В задачата се търси максимум, а в индексния ред има две отрицателни характеристики: $\Delta_2 = -1$ и $\Delta_5 = -7$. Това според критерия за оптималност показва, че решението X_1 не е оптимално.

3^0. *Стълбът, който се намира над отрицателната характеристика при максимум или над положителната характеристика при минимум се нарича ключов (разрешаващ) стълб.*

В задачата от двете отрицателни характеристики избираме по-малката: $\Delta_5 = -7$, т. е. ключов стълб е векторът A_5.

При минимум, ако в индексния ред има повече от една положителна характеристика , се избира най-голямата от тях.

4^0. *Образуват се отношенията между свободните членове (стълб B) и съответните положителни числа от ключовия стълб. От тези отношения се избира най-малкото и то отговаря на величината θ от 3.3.2. Редът, който отговаря на това най-малко отношение се нарича ключов (разрешаващ) ред.*

В задачата

$$\theta = \min\{\frac{5}{3}, \frac{36}{1}\} = \frac{5}{3},$$

така че разрешаващ ред е вторият.

5^0. *Общият елемент на ключовия ред и на ключовия стълб се нарича ключов (разрешаващ) елемент.*

Ако разрешаващият елемент е a_{kp} , неизвестната x_p става базисна в следващата симплексна таблица на мястото на неизвестната, която се е намирала в к-тия ред.

В задачата разрешаващ елемент е $a_{25} = 3$ и той показва, че във втората таблица x_5 става базисна неизвестна на мястото на x_1 .

6^0. *Главният ред в дадена таблица се получава от ключовия ред на предходната таблица, като елементите му се разделят с ключовия елемент.*

В нашия пример главният ред във втората таблица се получава от ключовия ред на първата таблица, като елементите му се умножат с числото $\frac{1}{3}$.

7^0. *Останалите редове на таблицата се получават чрез Гаус-Жордановите преобразувания, така че стълбът, отговарящ на новата базисна неизвестна да стане съответен единичен стълб.*

В примера главният ред се умножава с 2 и -1 и се прибавя съответно към първия и към третия ред.

8^0. *Функционалната стойност $Z(X_2)$ се изчислява или по формулата*

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \Delta_p \theta$$

или чрез скаларното произведение $C_Б B$.

В нашия пример от втората таблица подобреното решение е векторът

$$X_2 = (0,\, 0,\, \frac{28}{3}, \frac{103}{3}, \frac{5}{3}, 0),$$

а функционалната стойност, отговаряща на това решение се намира или чрез

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \Delta_5 \theta = 107 - (-7).\frac{5}{3} = \frac{356}{3}$$

или чрез

$$Z(X_2) = C_Б B = -1.\frac{28}{3} + 15.\frac{5}{3} + 3.\frac{103}{3} = \frac{356}{3}.$$

Преходът от втората към третата таблица се осъществява по аналогичен начин чрез посочените правила. Да направим това.

Характеристиката $\Delta_2 = -\frac{10}{3} < 0$ показва, че векторът X_2 не е оптимално решение. Определяме

$$\theta = \min\{\frac{\frac{28}{3}}{\frac{7}{3}}, \frac{\frac{103}{3}}{\frac{22}{3}}\} = 4.$$

Ключовият елемент $a_{12} = \frac{7}{3}$ показва, че x_2 е новата базисна неизвестна и ще замени x_3. Главният ред в третата таблица е първият ред и неговите елементи ще се получат като елементите на първия ред от втората таблица се умножат с $\frac{3}{7}$. След това полученият главен ред се умножава последователно с $\frac{1}{3}, -\frac{22}{7}, \frac{10}{3}$, след което се прибавя съответно към втория ред, третия ред и индексния ред.

В индексния ред на получената трета таблица няма отрицателни характеристики, което според критерия за оптималност означава, че тази таблица съдържа както оптималното решение, така и максималната стойност на целевата функция и те са

$$X_{opt} = (0, 4, 0, 5, 3, 0),\ Z_{max} = Z(X_{opt}) = 132.$$

Ще добавим останалите правила към алгоритъма на симплексния метод.

9^0. *Ако в индексния ред на оптималната (последната) симплексна таблица броят на характеристиките, които са равни на нула, е по-голям от броя на ограничителните условия, задачата има безброй много оптимални решения.*

Второто оптимално базисно решение може да се получи като се направи преход към следваща таблица, като за ключов стълб се избере този, в който има характеристика, равна на нула, отговаряща на небазисна неизвестна.

10^0. *Ако в задача за максимум (минимум) в индексния ред най-малката отрицателна (най-голямата положителна) характеристика не е единствена, се взема най-лявата от тях.*

11^0. *Ако ключовият ред не се определя еднозначно (минималното отношение θ се получава в повече от един ред), за ключов ред се избира най-горният.*

12^0. *Целевата функция няма краен екстремум ($Z \to \pm\infty$), ако в някоя симплексна таблица в ключовия стълб няма нито един положителен елеменнт.*

13^0. *Макар и в много редки случаи, може да се получи повторение на една симплексна таблица. Това се нарича зацикляне и може да се появи само при нееднозначност при определяне на величината θ. Зацикляването се избягва като се избере нов ключов ред.*

145. Решете задачата

$$\min\{Z(X) = x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \end{vmatrix}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$$

Решение: Въвеждаме допълнителни неизвестни x_5 и x_6 (вж. 2.9.) и получаваме системата уравнения

$$\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 20. \end{vmatrix}$$

Допълнителните неизвестни трябва да са неотрицателни и се включват в целевата функция с нулеви коефициенти.

$C_Б$	Б	B	1 x_1	3 x_2	-4 x_3	2 x_4	0 x_5	0 x_6
0	x_5	14	1	2	1	1	1	0
0	x_6	20	4	3	$\boxed{2}$	3	0	1
		0	-1	-3	4	-2	0	0
0	x_5	4	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
-4	x_3	10	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
		-40	-9	-9	0	-8	0	-2

Базисните неизвестни в първата симплексна таблица са x_5 и x_6 и първото базисно решение е

$$X_1 = (0, 0, 0, 0, 14, 20),$$

а съответната му функционална стойност е равна на $Z(X_1) = 0$. Положителна характеристика е $\Delta_3 = 4 > 0$ и това показва, според критерия за оптималност, че X_1 не е оптимално решение. Ключов стълб е A_3. Определяме

$$\theta = \min\{\frac{14}{1}, \frac{20}{2}\} = 10,$$

така че ключов елемент е $a_{23} = 2$. Новата базисна неизвестна е x_3, която заменя x_6. Във втората таблица няма положителни характеристики, което показва, че е достигнато оптималното решение:

$$X_{opt} = (0, 0, 10, 0, 4, 0),\ \ Z_{min} = Z(X_{opt}) = -40.$$

146. Фирма произвежда изделията A, B, C, като разполага с 565 единици електроенергия, 480 единици стомана и 735 единици алуминий. Разходните норми за единица изделие са дадени в таблицата.

	A	B	C
EE	2	3	3
Ст.	3	2	1
Al	4	1	2

Печалбата от единица от всяко изделие е съответно 9, 8, 4. Да се намери производствена програма, която:

а) осъществява най-голяма печалба;

б) осигурява най-пълно използване на наличните ресурси.

Решение: а) Нека x_1, x_2, x_3 са неизвестните количества съответно от изделията A, B, C, които трябва да се произведат, за да се реализира максимална печалба. Под производствена програма ще разбираме тримерния вектор $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Тогава печалбата ще се изрази чрез целевата функция

$$Z(X) = 9x_1+8x_2+4x_3,$$

на която се търси максимум. Ограничителните условия, свързани с разходните норми се изразяват със системата неравенства

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+3x_3 \le 565 \\ 3x_1+2x_2+\ x_3\ \le 480 \\ 4x_1+x_2+2x_3 \le 735, \end{array}\right.$$

в която x_1, x_2, x_3 са неотрицателни числа.

Чрез допълнителните неизвестни x_4, x_5, x_6, които трябва да са също така неотрицателни числа, получаваме системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+3x_3+x_4 \qquad\quad = 565 \\ 3x_1+2x_2+\ x_3 \qquad +x_5 \quad = 480 \\ 4x_1+\ x_2\ +2x_3 \qquad\quad +x_6 = 735. \end{array}\right.$$

Под решение ще разбираме шестмерния вектор

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

на който първите координати са произведените количества от изделията A, B, C, а x_4, x_5, x_6 са неизползваните количества съответно от трите суровини: електроенергия, стомана и алуминий.

В третата таблица се достига до оптималното решение:

$$X_{opt} = (62,\ 147,\ 0,\ 0,\ 0,\ 335),\ \ Z_{max} = 1734,$$

т. е. максималната печалба 1734 ще се получи, когато от изделията А и В се произведат съответно по 62 и 147 единици, а от изделието С не се произвежда. Тогава наличните количества електроенергия и стомана ще се използват изцяло ($x_4 = x_5 = 0$), а от алуминий ще останат неизползвани $x_6 = 340$ единици.

			б)	0	0	0	1	1	1
			а)	9	8	4	0	0	0
	$C_Б$	Б	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	x_4	565	2	3	3	1	0	0
	0	x_5	480	$\boxed{3}$	2	1	0	1	0
	0	x_6	735	4	1	2	0	0	1
			0	-9	-8	-4	0	0	0
	0	x_4	245	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0
	9	x_1	160	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
	0	x_6	95	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1
$C_Б^б$			1440	0	-2	-1	0	3	0
0	8	x_2	147	0	1	$\boxed{\frac{7}{5}}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
0	9	x_1	62	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
1	0	x_6	340	0	0	3	1	-2	1
			1734	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{5}$	0
			340	0	0	3	0	-3	0
	0	x_3	105	0	$\frac{5}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0
	0	x_1	125	1	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
	1	x_6	25	0	$-\frac{15}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	1
			25	0	$-\frac{15}{7}$	0	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{15}{7}$	0

б) Целевата функция сега е

$$F(X) = x_4 + x_5 + x_6$$

и тя изразява сумата от неизползваните количества от трите суровини; трябва да се намери нейният минимум. Ограничителните условия са същите, както в случая а). За да се намали обема на изчислителните операции, за начална е използвана третата симплексна таблица. В нея е записан нов индексен ред, получен чрез новия целеви базисен стълб, отговарящ на базисните неизвестни x_2, x_1 и x_6. В новия индексен ред $\Delta_3 = 3$. След прехода в следващата таблица се получава оптималното решение

$$X_{opt} = (125,\ 0\ 105,\ 0,\ 0,\ 25),\ \ F_{min} = F(X_{opt}) = 25.$$

Минималният остатък от 25 единици алуминий (абсолютният минимум на функцията F(X) е равен на нула) се получава, ако се произведат по 125 единици и 105 единици съответно от изделията A и C, а от изделията B не се произвежда.

147. Да се намери максимумът и минимумът на функцията

$$Z(X) = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 8x_6$$

при ограничения за неизвестните

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 14 \\ 2x_1 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_5 + x_6 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_5 = 12 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 6.$$

Решение: Базисни неизвестни са x_4, x_3, x_6, x_2. Началнотото базисно решение е векторът $X_1 = (0, 12, 13, 14, 0, 5)$ с функционална стойност $Z(X_1) = 207$.

Ако търсим максимума на функцията, ключовият стълб A_5, който отговаря на отрицателната характеристика $\Delta_5 = -44 < 0$, съдържа само неположителни елементи, затова (вж. правило 12^0) областта на решение на задачата е неограничена отгоре и целевата функция няма краен максимум, т. е. $Z \to \infty$.

			5	6	3	4	10	8
$C_Б$	Б	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_4	14	1	0	0	1	−2	0
3	x_3	13	2	0	1	0	0	0
8	x_6	5	1	0	0	0	−1	1
6	x_2	12	$\boxed{3}$	1	0	0	−3	0
		207	31	0	0	0	−44	0
4	x_4	10	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	−1	0
3	x_3	5	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	2	0
8	x_6	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1
5	x_1	4	1	$\frac{1}{3}$	0	0	−1	0
		83	0	$-\frac{31}{3}$	0	0	−13	0

Ако търсим минимума на функцията, чрез положителната характеристика $\Delta_1 = 31 > 0$ правим преход към втората таблица, в която всички характеристиките в индексния ред са неположителни числа, затова оптималното решение е намерено:

$$X_{opt}=(4, 0, 5, 10, 0, 1),\ Z_{min}= Z(X_{opt}) = 83.$$

148. Решете задачата

$$\min\{Z(X) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5\}$$

$$\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 &\le 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 &\le 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &\le 4 \end{aligned} \right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5.$$

Упътване: Въведете трите допълнителни неизвестни x_6, x_7, x_8, които образуват първия базис. След четири прехода в петата симплексна таблица се достига до оптималното решение

$$X_1=(3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 6),\ Z_{min} = Z(X_1) = -5.$$

Тази пета оптимална симплексна таблица е първата от дадените по-долу две таблици. В нея характеристиката $\Delta_3 = 0$, а неизвестната x_3 не е базисна неизвестна. Това според правило 9^0 показва, че тази задача има безброй много оптимални решения. За да можем да ги получим, правим преход в следващата таблица, като за ключов стълб се избира третият стълб A_3. Неизвестната x_3 става базисна неизвестна на мястото на x_8. Новото оптимално базисно решение е

$$X_2 = (1, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0).$$

			-2	1	-3	2	10	0	0	0
$C_Б$	Б	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-2	x_1	3	1	0	1	1	-3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	x_2	1	0	1	-1	3	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	x_8	6	0	0	$\boxed{3}$	-3	-4	1	0	1
		-5	0	0	0	-1	-1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
-2	x_1	1	1	0	0	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	x_2	3	0	1	0	2	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
-3	x_3	2	0	0	1	-1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
		-5	0	0	0	-1	-1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

Всяка изпъкнала линейна комбинация от X_1 и X_2 е също оптимално (небазисно) решение:

$$X_3 = (1-к)X_1 + кX_2, \quad 0 \le к \le 1.$$

Например за $к = \frac{1}{2}$ се получава $X_3 = (2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 3)$, а за $к = \frac{1}{3}$ се получава

$X_4 = (\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0,0,0,0,4)$. Функционалната стойност отговаряща на всяко от тези оптимални решения е една и съща:

$$Z(X_1) = Z(X_2) = Z(X_3) = Z(X_4) = -5.$$

149. Решете задачата

$$\min\{Z(X) = 36x_1 + 2x_2 + 14x_3 + x_4 + 3x_5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 39 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 42 \\ 6x_1 + 5x_3 + 3x_4 \le 15 \end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5.$$

Отг.: $X_{opt} = (0, 52, 0, 5, 29)$, $Z_{min}=196$.

150. Намерете минимума и максимума на функцията

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 4x_3$$

при ограничителни условия

$$\left|\begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_1 + x_3 \le 3 \end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Отг.: $X_{opt} = (0, 1, 0, 3)$, $Z_{min} = 1$; $X_{opt} = (0, 4, 3, 0)$, $Z_{max} = 16$.

3.4. Метод на изкуствения базис (М метод)

Когато в една линейна оптимална задача няма начален базис, се прилага *методът на изкуствения базис*, който се изразява в следното.

На дадената задача се съпоставя съответна *помощна задача (М задача)*. В нея са въведени *изкуствени (фиктивни) неизвестни* с цел тя да притежава начален базис. Чрез решаване на тази нова задача се намира оптималното решение на изходната задача, или се разбира, че изходната задача няма решение.

Нека изходната задача има вида

$$\min(\max)\{Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\}$$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div n.$$

Предполага се, че в нея няма начален базис.

Помощната задача (M задачата), в зависимост от това дали се търси минимум или максимум, има вида

$$\min\{\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m}\}$$

$$\max\{\overline{Z}(\overline{X}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \dots - Mx_{n+m}\}$$

$$\left|\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & & & & + x_{n+m} & = b_m \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div n+m.$$

Въведеният параметър M е реално, достатъчно голямо число, стойността на което се определя във всяка конкретна задача, а неизвестните x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+m}, чрез които се получава началният базис, се наричат *изкуствени или фиктивни неизвестни.*

Връзката между изходната задача и съответната ѝ M задача се осъществява със следната

Теорема.

1. Нека M задачата има оптимално решение и то е

$$\overline{X}_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}).$$

1.1. Ако всички въведени фиктивни неизвестни имат стойност нула : $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+m} = 0$, изходната задача също има оптимално решение и то е

$$X_{opt} = (x_1, x_2, \dots , x_n).$$

1.2. Ако поне една от фиктивните неизвестни има положителна стойност: $x_{n+i} > 0$, за някой индекс i, областта на решение на изходната задача е празна.

2. Ако M задачата няма крайно оптимално решение, целевата функция на изходната задача Z(X) е неограничена или областта на решение на изходната задача е празна.

*****

От практиката е известно, че колкото повече изкуствени неизвестни са въведени в M задачата, толкова повече изчислителни операции има при решаването ѝ. Затова стремежът е да се въведат по възможност най-малко изкуствени неизвестни.

*****

151. Съставете M задача на следната задача

а) $\min\{Z(X)=5x_1-2x_2+4x_3\}$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0$, j = 1, 2, 3.

б) $\max\{Z(X)=2x_2 +5x_3\}$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0$, I = 1, 2, 3.

в) $\min\{Z(X)=x_1 + x_2 +2x_3 +3x_4\}$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq -3 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0$, j = 1 ÷ 4.

г) $\max\{Z(X)=3x_1-x_2+x_3+6x_4\}$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \geq 12 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 9 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0$, j = 1 ÷ 4.

Решение: а) Необходими са три изкуствени неизвестни. Съответната M задача е

$$\min\{ \overline{Z}(\overline{X}) = 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + Mx_4 + MX_5 + Mx_6 \}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = 8 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0$, j = 1 ÷ 6.

Началният базис е x_4, x_5, x_6.

б) В неравенството се въвъжда допълнителната неизвестна x_4. В целевата функция тя ще има коефициент нула. След това за да се състави М задачата са нужни две изкуствени неизвестни .

$$\max\{\,\overline{Z}(\overline{X}) = 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 \quad + x_5 \quad = 5 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 \quad + x_6 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad = 9 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 6.$$

Началният базис е образуван от неизвестните x_5, x_6, x_4.

в) Десните страни на третото и на четвъртото ограничение трябва да са положителни числа, затова умножаваме двете им страни с -1. Това може да стане преди или след въвеждането на допълнителните неизвестни x_5, x_6 и x_7. След това в М задачата са необходими две изкуствени неизвестни.

$$\min\{\,\overline{Z}(\overline{X}) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 0(x_5 + x_6 + x_7) + M(x_8 + x_9)\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad + x_5 \quad = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \quad x_8 \quad = 7 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 \quad - x_6 \quad + x_9 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + x_7 \quad = 3 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 9.$$

Началният базис е образуван от x_5, x_8, x_9, x_7.

г) Когато ограничителните условия съдържат система неравенства от типа АХ ≥ В, както е в случая, може за се получи начален базис с въвеждането само на една изкуствена неизвестна. За целта след въвеждането на допълнителните неизвестни, с което системата неравенства е сведена до система уравнения, от уравнението с най-голяма дясна част се изважда всяко от останалите уравнения. След това е нужно да се въведе само една изкуствена неизвестна. След като се направят тези преобразувания, М задачата е следната:

$$\max\{\,\overline{Z}(\overline{X}) = 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + 0(x_5 + x_6 + x_7 + x_8) - Mx_9\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 \quad - x_7 \quad = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \quad + x_6 - x_7 \quad = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \quad - x_7 \quad + x_9 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 \quad - x_7 + x_8 \quad = 3 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 9.$$

Началният базис е x_5, x_6, x_9, x_8.

151. Решете задачата

$$\min\{Z(X) = x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$$

Решение: Съответната M задача е

$$\min\{\overline{Z}(\overline{X}) = x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + Mx_6\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 6.$$

$C_Б$	Б	B	1 x_1	1 x_2	4 x_3	3 x_4	5 x_5	M x_6
M	x_6	2	$\boxed{2}$	-1	-1	0	0	1
3	x_4	2	1	-2	0	1	0	0
5	x_5	5	1	1	0	0	1	0
		$2M + 31$	$2M + 7$	$-M-2$	$-M-4$	0	0	0
1	x_1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	
3	x_4	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	
5	x_5	4	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	
		24	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	
1	x_1	$\frac{7}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
3	x_4	5	0	0	1	1	1	
1	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
		20	0	0	-1	0	-1	

Параметърът M е положително число, затова характеристиката Δ_1 = 2M+7 е положително число, а $\Delta_2 = -M - 2$ и $\Delta_3 = -M - 4$ са отрицателни числа.

Лесно се съобразява, че когато една изкуствена неизвестна е излязла от базиса, тя не може да стане отново базисна неизвестна до края на задачата. Затова не е необходимо да се изчисляват стълбовете на излязлата от базиса изкуствена неизвестна.

В третата таблица x_6 = 0, което показва, че оптималното решение на изходната задача е намерено:

$$X_{opt} = (\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0, 5, 0),\ Z_{min} = Z(X_{opt}) = 20.$$

152. Решете задачата

$$\max\{Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 9 \end{array} \right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Упътване: В съответната M задача началният базис е x_5, x_6, x_4. В четвъртата таблица при базис x_3, x_1, x_2 оптималното решение на изходната задача е

$$\mathbf{X}_{opt} = (1, 1, 3, 0),\ Z_{max} = 13.$$

153. При отглеждането на животни в ежеседмичния режим на хранене на всяко животно са нужни поне 16 единици от хранителното вещество A, поне 19 единици от хранителното вещество B и поне 26 единици от хранителното вещество C. Използват се три вида храни. Съдържанието на хранителните вещества A, B, C в една тегловна единица от всяка храна е дадено в таблицата.

	храни		
	I	II	III
A	2	1	3
B	1	3	2
C	2	3	4

Да се състави най-евтиния режим на хранене, ако цената на една тегловна единица от всяка храна е съответно 20, 35, 28.

Решение: Ако с x_1, x_2, x_3 означим съответните неизвестни количества от всяка храна, под режим на хранене ще разбираме тримерния вектор $X=(x_1,x_2,x_3)$. Математическият модел на задачата е

$$\min\{Z(X)=20x_1 + 35x_2 + 28x_3\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 16 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 19 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 26 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Чрез допълнителните неизвестни x_4, x_5, x_6 получаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 19 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6 = 26. \end{array} \right.$$

От представянето

$$x_4 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 16$$

се съобразява, че x_4 е количеството от хранителното вещество A, което ще се съдържа в храната над минималното изискване от 16 единици според хранителните норми. Аналогично x_5 и x_6 са съответните количества от хранителните вещества B и C, които ще се съдържат в храната над минималните количества 19 и 26 единици. С цел задачата да се реши само с една изкуствена неизвестна, правим преобразуванията, които разгледахме в задача 150 г), именно третото уравнение, което е с най-голяма дясна част се запазва. От третото уравнение се изваждат първото и второто уравнение. След това в третото уравнение се въвежда единствената изкуствена неизвестна x_7. След като се направят тези преобразувания M задачата е:

$$\min\{\overline{Z}(\overline{X}) = 20x_1 + 35x_2 + 28x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) + Mx_7\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 10 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 - x_6 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6 + x_7 = 26 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 7.$$

От четвъртата таблица намираме оптималното решение на изходната задача:

$$X_{opt} = (0, \frac{25}{7}, \frac{29}{7}, 0, 0, \frac{9}{7}),\ Z_{min} = 241.$$

			20	35	28	0	0	0	M
$C_Б$	Б	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	10	0	2	1	1	0	-1	0
0	x_5	7	1	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	0
M	x_7	26	2	3	4	0	0	-1	1
		$26M$	$2M-20$	$3M-35$	$4M-28$	0	0	$-M$	0
0	x_4	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
28	x_3	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
M	x_7	12	0	3	0	0	-2	1	1
		$12M+98$	-6	$3M-35$	0	0	$-2M+14$	$M-14$	0
0	x_2	$\frac{13}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
28	x_3	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
M	x_7	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\boxed{\frac{7}{4}}$	1
		$\frac{9}{4}M+98$	$\frac{3}{4}M-6$	0	0	$-\frac{3}{2}M$	$-\frac{5}{4}M+14$	$\frac{7}{4}M-14$	0
35	x_2	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	
28	x_3	$\frac{29}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	
0	x_6	$\frac{9}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	
		241	-5	0	0	-2	-11	0	

От него се разбира, че най-евтиният седмичен режим на хранене трябва да се осъществи чрез втората и третата храна съответно по $x_2 = \frac{25}{7}$ и $x_3 = \frac{29}{7}$. Тогава от хранителното вещество С ще се съдържат $x_6 = \frac{9}{7}$ единици над предвидената минимална норма от 26 единици, а хранителните вещества А и В ще се съдържат в храната според минималните изисквания от 16 и 19 единици, защото $x_4 = x_5 = 0$.

*****

Този пример е от така наречените *задачи за диетата (задачи за храненето).* Въпреки че данните в него са условни, могат да се отбележат два момента, характерни за този тип задачи, които се явяват много често в практиката.

Първо, функцията

$$F(X) = x_4 + x_5 + x_6,$$

която изразява сумата от наднормените количества от хранителните вещества, е равна на $\frac{9}{7}$. Това означава, че за да се получи най-евтина храна, която е със стойност Z_{min} = = 241, в храната трябва да се съдържа наднормeното количество $x_6 = \frac{9}{7}$ единици от хранителното вещество С. А в случая, когато F (X) достига своя абсолютен минимум, който е равен на нула при $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, решението на задачата е вектора X = (3,4,2), на което отговаря функционалната стойност Z(X) = 256, която е с 15 пункта над $Z_{min} = 241$.

Второ, от първата храна, която е най-евтина, в оптималното решение не се предвижда: $x_1 = 0$.

154. Решете задачата

$$\max\{Z(X)= -x_1 + 2x_2 - 3x_3\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Решение: М задачата е

$$\max\{\overline{Z}(\overline{X}) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - Mx_4 - Mx_5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \quad\quad = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad\quad + x_5 = 10 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$$

$C_Б$	Б	B	-1 x_1	2 x_2	-3 x_3	$-M$ x_4	$-M$ x_5
$-M$	x_4	20	-2	1	3	1	0
$-M$	x_5	10	2	3	$\boxed{4}$	0	1
		$-30M$	1	$-4M-2$	$-7M+3$	0	0
$-M$	x_4	$\frac{25}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	
-3	x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	0	
		$-\frac{25}{2}M-\frac{15}{2}$	$\frac{7}{2}M-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}M-\frac{17}{4}$	0	0	

От втората таблица получаваме оптималното решение на М задачата:

$$\overline{X}_{opt} = (0,\ 0,\ \frac{5}{2}, \frac{25}{2}, 0),\ \overline{Z}_{\max} = \overline{Z}(\overline{X}_{opt}) = -\frac{25}{2}M - \frac{15}{2}.$$

Тъй като едната изкуствена неизвестна е положителна: $x_4 = \frac{25}{2} > 0$, областта на решение на изходната задача е празна.

155. Според производствена програма на фирма трябва да се произведат 100 единици от изделие A, 60 единици от изделие B и 90 единици от изделие C. Всяко от изделията може да бъде произведено на всяка една от двете машини, с които разполага фирмата. Производителността на машините за единица от всяко от изделията A, B и C е дадена в таблицата. Ако машините работят непрекъснато, как трябва да се организира производственият процес, че производствената програма на фирмата да се реализира за най-кратко време?

	Изделие		
Машина	A	B	C
I	2	5	5
II	3	4	10

Упътване: С x_1, x_2, x_3 означаваме съответния брой изделия от вида A, B, C, които трябва да се произведат на първата машина, а с x_4, x_5, x_6 – съответния брой от същите изделия, които трябва да се произведат на втората машина. Ако с x_7 означим времето за изпълнение на цялата работа, математическият модел на задачата е

$$\min\{Z(X) = x_7\}$$

$$\left|\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & x_4 & & & =100 \\
 & x_2 & & & +x_5 & & =60 \\
 & & x_3 & & & +x_6 & =90 \\
2x_1 & +5x_2 & +5x_3 & & & & \le x_7 \\
 & & & 3x_4 & +4x_5 & +10x_6 & \le x_7
\end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 7.$$

Отг.: $X_{opt}= (18, 0, 90, 82, 60, 0, 486)$, $Z_{min}= Z(X_{opt}) = 486$.

156. Намерете минимума и максимума на функцията

$$Z(X) = x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5$$

при ограничения

$$\left|\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\
x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\
4x_2 + x_3 - x_5 = 13
\end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5.$$

Отг. : $X_{opt}=(14, 2, 5, 0, 0)$, $Z_{min} = -4$; $X_{opt} = (0, 6, 3, 0, 14)$, $Z_{max} = 22$.

3.5. Дуалност (двойственост) в линейното оптимиране

На всяка задача от линейното оптимиране по определени правила се съпоставя друга задача от линейното оптимиране, която се нарича *нейна дуална (двойствена, дуално-спрегната).* Това съответствие е взаимно-обратимо, т. е. *дуалната на една дуална задача съвпада с изходната.*

3.5.1. Правила за дуално съответствие

1. Ако в една задача се търси минимум (максимум), в дуално-спрегнатата й задача се търси максимум (минимум).

2. Коефициентите на целевата функция в едната задача са свободни членове в ограничителните условия на другата задача.

3. Матриците от коефициентите на ограничителните условия в двете задачи са транспонирани една на друга.

4. Когато в системата от ограничителни условия има неравенства, те трябва да са от типа:

“$\leq$“ при максимум,

“$\geq$“ при минимум.

5. На всяко неотрицателно неизвестно от едната задача отговаря неравенство със същия номер в другата задача и обратно: на всяко неравенство от едната задача отговаря неотрицателно неизвестно със същия номер в другата задача.

6. На всяко произволно по знак неизвестно от едната задача отговаря уравнение със същия номер в другата задача и обратно: на всяко уравнение от едната задача отговаря произволно по знак неизвестно със същия номер в другата задача.

*****

Общият вид на двойка дуално-спрегнати задачи според тези шест правила е следният (k, r, m, n са естествени числа):

$$\max\{Z(X)= c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+c_rx_r+\ldots+c_nx_n\}$$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \ldots + \quad a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + \ldots + \quad a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + \quad a_{k2}x_2 + \ldots + \quad a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \quad a_{m2}x_2 + \ldots + \quad a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_r \ge 0,$

$x_{r+1},\ x_{r+2},\ \ldots,\ x_n$ – произволни по знак.

$$\min\{F(Y) = b_1y_1+b_2y_2 + \ldots + b_my_m\}$$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}y_1 + \quad a_{21}y_2 + \ldots + \quad a_{k1}y_k + \ldots + \quad a_{m1}y_m \ge \ c_1 \\ a_{12}y_1 + \quad a_{22}y_2 + \ldots + \quad a_{k2}y_k + \ldots + \quad a_{m2}y_m \ge \ c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1r}y_1 + \quad a_{2r}y_2 + \ldots + \quad a_{kr}y_k + \ldots + \quad a_{mr}y_m \ge \ c_r \\ a_{1,r+1}y_1 + a_{2,r+1}y_2 + \ldots + \ a_{k,r+1}y_k + \ldots + a_{m,r+1}y_m = c_{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \quad a_{2n}y_2 + \ldots + \quad a_{kn}y_k + \ldots + \quad a_{mn}y_m = \ c_n \end{array}\right.$$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ \ldots,\ y_k \ge 0,$

$y_{k+1},\ y_{k+2},\ \ldots,\ y_m$ – произволни по знак.

Всяко решение на първата задача е n-мерен вектор

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а всяко решение на дуалната й задача е m-мерен вектор

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

За удобство векторът X е записан като вектор ред, вместо като вектор стълб, какъвто е той.

Двойка дуални задачи от вида

$$\max\{Z(X) = CX\} \qquad \min\{F(Y) = YB\}$$
$$AX \le B \qquad YA \ge C$$
$$X \ge O \qquad Y \ge O$$

се наричат *симетрични*, а двойка дуални задачи от вида

$$\max\{Z(X) = CX\} \qquad \min\{F(Y) = YB\}$$
$$AX \le B \qquad YA = C$$
$$Y \ge O$$

или от вида

$$\max\{Z(X) = CX\} \qquad \min\{F(Y) = YB\}$$
$$AX = B \qquad YA \ge C$$
$$X \ge O$$

се наричат *несиметрични.*

3.5.2. Свойства на двойка дуални задачи

1. Ако $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ са произволни решения на двойка дуални задачи, то

$$Z(\overline{X}) \le F(\overline{Y}).$$

2. Двойка дуални задачи едновременно имат или едновременно нямат решения. Ако X_o и Y_o са оптималните им решения, то

$$Z(X_o) = F(Y_o).$$

3. Необходимото и достатъчно условие X_o и Y_o да са оптимални решения на двойка дуални задачи е да е изпълнена системата

$$\left| \begin{array}{l} Y_O(AX_O - B) = 0 \\ (Y_O A - C)X_O = 0. \end{array} \right.$$

4. Ако една задача е решена със симплекс метод, координатите на оптималното решение на нейната дуална задача се получават, като към характеристиките в оптималната таблица, които отговарят на неизвестните от началния базис, се прибавят съответните им целеви коефициенти. Свойството е в сила и когато задачата е решена с метода на изкуствения базис.

157. Съставете дуалната на следните задачи

а) $\min\{Z(X) = 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 13x_4\}$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 17 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 11 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$,

x_2, x_4 – произволни по знак.

б) $\max\{Z(X) = x_1 + 12x_2 + 14x_3\}$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$,

x_2, x_3 – произволни по знак.

Отг.: а) $\max\{F(Y) = 17y_1 + 11y_2\}$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \le 7 \\ -3y_1 + 6y_2 = -2 \\ 5y_1 - y_2 \le 4 \\ 8y_1 + 5y_2 = 13 \end{cases}$$

$y_2 \ge 0$,

y_1 – произволна по знак.

б) $\min\{F(Y) = 10y_1 - 9y_2 + +8y_3\}$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ -5y_1 + 2y_2 + y_3 = 12 \\ y_1 - 6y_2 + 3y_3 = 14 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$,

y_2, y_3 – произволни по знак.

158. Съставете дуалната на задача 144 и чрез свойство 4 на дуалните задачи намерете оптималното й решение.

Решение:

$$\min\{F(Y) = 6y_1 + 5y_2 + 36y_3\}$$

$$\begin{cases} y_2 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 + 7y_3 \ge 18 \\ y_1 \ge -1 \\ y_3 \ge 3 \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 15 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 2 \end{cases}$$

y_1, y_2, y_3 – произволни по знак.

Оптималното решение на тази задача е тримерният вектор $Y_{opt} = (y_1, y_2, y_3)$, чиито координати се получават от оптималната (третата) таблица според свойство 4:

$$y_1 = \frac{10}{7} + (-1) = \frac{3}{7},$$

$$y_2 = \frac{23}{7} + 1 = \frac{30}{7},$$

$$y_3 = 0 + 3 = 3,$$

т. е. $Y_{opt} = (\frac{3}{7}, \frac{30}{7}, 3)$, а според свойство 2 на дуалните задачи $F_{min} = Z_{max} = 132$.

159. Намерете оптималните решения на двойка дуални задачи, ако едната от тях е

$$\max\{Z(X) = 10x_1 + 8x_2 + 4x_3\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ x_2 \le 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le -1 \\ x_3 \le 4 \\ x_1 \le 2 \end{array} \right.$$

x_1, x_2, x_3 - произволни по знак.

Решение: Дуалната задача е

$$\min\{F(Y) = 5y_1 + y_2 - y_3 + 4y_4 + 2y_5\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2y_1 + 3y_3 + y_5 = 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 8 \\ -y_1 + y_3 + y_4 = 4 \end{array} \right.$$

$$y_i \ge 0, \; i = 1 \div 5.$$

Дуалната задача е по-удобна за решаване, защото в нея е налице начален базис. Решението е получено в две симплексни таблици.

$$Y_{opt} = (0, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}, 0), \quad F_{min} = \frac{2}{3}.$$

От свойство 4 на дуалните задачи намираме

$$x_1 = -\frac{13}{3} + 2 = -\frac{7}{3},$$

$$x_2 = 0 + 1 = 1,$$

$$x_3 = 0 + 4 = 4,$$

$C_Б$	Б	B	5 y_1	1 y_2	−1 y_3	4 y_4	2 y_5
2	y_5	10	2	0	$\boxed{3}$	0	1
1	y_2	8	1	1	2	0	0
4	y_4	4	−1	0	1	1	0
		44	−4	0	13	0	0
−1	y_3	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$
1	y_2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$
4	y_4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$
		$\frac{2}{3}$	$-\frac{38}{3}$	0	0	0	$-\frac{13}{3}$

така че

$$X_{opt} = \left(-\frac{7}{3}, 1, 4\right),\quad Z_{max} = F_{min} = \frac{2}{3}.$$

160. Да се намерят оптималните решения на задачата

$$\max\{Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\}$$

$$\left|\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 8 \end{aligned}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3$$

и на нейната дуална задача.

Решение: Дуалната задача е

$$\min\{F(Y) = 6y_1 + 8y_2\}$$

$$\left|\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\ge 2 \\ 3y_1 + y_2 &\ge 3 \\ 2y_1 + 4y_2 &\ge 4 \end{aligned}\right.$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Първи начин: Дуалната задача е удобно да се реши по графичен начин. Нейното оптмално решение е

$$Y_{opt} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), F_{min} = \frac{48}{5}.$$

Координатите на оптималното решение $X_{opt} = (x_1, x_2, x_3)$, според свойство 3 на дуалните задачи, удовлетворява системата

$$\begin{cases} \frac{4}{5}(2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6) = 0 \\ \frac{3}{5}(x_1 + x_2 + 4x_3 - 8) = 0 \\ (\frac{8}{5} + \frac{3}{5} - 2)x_1 = 0 \\ (\frac{12}{5} + \frac{3}{5} - 3)x_2 = 0 \\ (\frac{8}{5} + \frac{12}{5} - 4)x_3 = 0. \end{cases}$$

От третото уравнение следва $x_1 = 0$, затова от първите две уравнения получаваме системата

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + 4x_3 = 8, \end{cases}$$

откъдето $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = \frac{9}{5}$. Окончателно

$$X_{opt} = (0, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}),\ Z_{\max} = Z(X_{opt}) = \frac{48}{5}.$$

Втори начин: Ако изходната задача се реши със симплекс метод, от последната трета таблица имаме

$C_Б$	Б	B	2 x_1	3 x_2	4 x_3	0 x_4	0 x_5
0	x_4	6	2	3	2	1	0
0	x_5	8	1	1	$\boxed{4}$	0	1
		0	-2	-3	-4	0	0
0	x_4	2	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
4	x_3	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$
		8	-1	-2	0	0	1
3	x_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
4	x_3	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
		$\frac{48}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$X_{opt} = (0, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}),\ Z_{\max} = Z(X_{opt}) = \frac{48}{5}.$$

Според свойство 4 на дуалните задачи координатите на оптималното решение на дуалната задача са

$$y_1 = \frac{4}{5} + 0 = \frac{4}{5},$$

$$y_2 = \frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5},$$

т. е.

$$Y_{opt} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}),\ F_{\min} = Z_{\max} = \frac{48}{5}.$$

3.6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

3.6.1. Математически модел

Една специална задача на математическото оптимиране, която има широко приложение в практиката, е така наречената *транспортна задача.* Тя се изразява в следното.

Един и същ продукт се произвежда в m пункта производители в количества съответно $a_1, a_2, \dots, a_m$. Налице са n пункта потребители с потребности съответно $b_1, b_2, \dots, b_n$. Известни са още и транспортните разходи c_{ij}, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$, за превоз на единица продукция от i – тия производител до j – тия потребител. Търси се такова разпределение на произведената продукция, при което общите транспортни разходи са най-малки.

Ако x_{ij}, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$, е неизвестното количество продукция, произведено в i – тия производител и доставено на j – тия потребител, данните могат да се разположат в една таблица.

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Математическият модел на тази задача е

(1) $$\min\{Z(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}\}$$

(2) $$\left| \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{array} \right.$$

(3) $$\left| \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{array} \right.$$

(4) $$x_{ij} \geq 0,\ i = 1 \div m,\ \ j = 1 \div n.$$

Функцията (1) се нарича *целева функция*, а (2), (3) и (4) образуват *ограничителните условия на транспортната задача.*

Нека с X означим матрицата

$$X = \left\| \begin{array}{l} x_{11} \quad x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21} \quad x_{22} \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} \quad x_{m2} \ldots x_{mn} \end{array} \right\|,$$

която съдържа всички неизвестни в задачата.

Решение на задачата (1)-(4) се нарича всяка матрица X, елементите на която удовлетворяват ограниченията (2), (3) и (4).

Оптимално решение е това решение, за което целевата функция (1) има най-малка стойност.

Равенството

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

се нарича *балансово равенство.* То може да се запише по-кратко във вида

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Балансовото равенство изразява факта, че общият обем на производство съвпада с общия обем на потребление.

Матрицата A, която съдържа коефициентите пред неизвестните в системите (2) и (3) има вида

$$
A = \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 1 \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \quad 0 \ldots 0 \\ 0 \quad 0 \ldots 0 \quad 1 \quad 1 \ldots 1 \ldots 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots 0 \quad 0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 1 \quad 1 \ldots 1 \\ \\ 1 \quad 0 \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \ldots 0 \ldots 1 \quad 0 \ldots 0 \\ 0 \quad 1 \ldots 0 \quad 0 \quad 1 \ldots 0 \ldots 0 \quad 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots 1 \quad 0 \quad 0 \ldots 1 \ldots 0 \quad 0 \ldots 1 \end{array} \right\| =
$$

$$
= \left\| A_{11} \quad A_{12} \ldots A_{1n} \quad A_{21} \quad A_{22} \ldots A_{2n} \ldots A_{m1} \quad A_{m2} \ldots A_{mn} \right\| .
$$

3.6.2. Свойства на транспортната задача

1. *Необходимото и достатъчно условие транспортната задача (1) – (4) да има оптимално решение е да е изпълнено балансовото равенство.*

2. *Рангът на матрицата A е равен на* m + n – 1.

*****

Ако в една транспортна задача е нарушено балансовото равенство, т. е. ако $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, тя се нарича *открита задача или задача с нарушен баланс.* Тогава се постъпва така.

Ако $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ се въвежда изкуствен производител с производство равно на

$$
a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .
$$

Ако $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ се въвежда изкуствен потребител с потребление равно на

$$
b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .
$$

И в двата случая транспортните разходи във въведения изкуствен ред или във въведения изкуствен стълб имат стойности нула.

От второто свойство следва, че всяко базисно решение на транспортната задача може да съдържа най-много $m + n - 1$ положителни елементи x_{ij} в матрицата A. Останалите елементи в тази матрица имат стойност нула.

*****

Решаването на транспортната задача би могло да се осъществи чрез симплекс метод, но се оказва, че това е нецелесъобразно, тъй като ще се явят излишно много изчислителни операции. Затова са създадени много по-рационални методи за решаване на транспортната задача, които отчитат нейните важни специфични особености. Тези особености са четири:

а) Всички ограничения в системата (2) и (3) са уравнения.

б) Коефициентите пред неизвестните в матрицата A са равни на нула или единица.

в) Всяка неизвестна x_{ij} участва само в i – тото уравнение на (2) и само в j – тото уравнение на (3).

г) Транспортните задачи най-често са с големи размери. Ако приемем например производителите да са $m=30$, а потребителите $n=40$ (размери в никакъв случай, ненадхвърлящи тези от практиката), матрицата A ще бъде с размери (70, 1200), т. е. задачата ще съдържа 1200 неизвестни.

Предстои да разгледаме един от методите за решаване на транспортните задачи, който се нарича *метод на потенциалите.*

3.6.3. Метод на потенциалите

Основното в този метод е това, че той е един сходящ итеративен процес, който преминава през същите три основни етапа, както това беше при симплексния метод, именно

1. *Намиране на начално базисно решение.*
2. *Критерий за оптималност.*
3. *Преход към по-добро базисно решение.*

Ще разгледаме подробно всеки от тези етапи.

3.6.3.1. Намиране на начално базисно решение

Определянето на начално базисно решение може да стане по два начина.

а) *Правило на минималните транспортни разходи*

В таблицата се попълва най-напред клетката (полето) с най-малкия транспортен разход. Ако има повече от една такава клетка, попълва се коя да е от тях. Ако приемем, че най-малкият транспортен разход е c_{kp} $(1 \le k \le m,\ 1 \le p \le n)$, клетката (k, p) се попълва с количеството

$$x_{kp} = \min\{a_k, b_p\}.$$

Ако $a_k < b_p$, това означава изчерпване на k-тия производител, а ако $a_k > b_p$, това означава цялостно задоволяване на p-тия потребител. Ако $x_{kp} = a_k$, останалите клетки в k-тия ред остават празни, т. е. всички x_{kj} от k-тия ред, с изключение на x_{kp} са свободни неизвестни и имат стойност нула. Ако $x_{kp} = b_p$, останалите клетки от p-тия стълб остават празни, т.е. всички x_{ip} от p-тия стълб, с изключение на x_{kp} са свободни неизвестни и имат стойност нула.

След това се преминава към попълване на клетката със следващия по големина транспортен разход до изчерпване на всички количества a_i и b_j, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$.

Ще приложим разгледаното правило в следващата задача.

161. Да се намери начално базисно решение на транспортната задача

5	1	3	6	40
7	3	4	8	30
8	2	2	10	30
23	26	19	32	

в която се търси минимум.

Решение: Балансовото равенство е изпълнено:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 100.$$

В клетката (1,2) транспортният разход е най-малък:

$$c_{12} = \min_{i,j} \{c_{ij}\} = 1.$$

За x_{12} намираме $x_{12} = \min\{40,26\}= 26$. Така вторият потребител е задоволен изцяло и затова $x_{22} = x_{32} = 0$, а от производството на първия производител остават още $a_1 - b_2 = 40 - 26 = 14$ единици. Данните попълваме в таблицата.

Следващата клетка, която трябва да се попълни е (3,3). В нея транспортният разход е $c_{33} = 2$. За x_{33} се получава

$$x_{33} = \min\{30,19\}=19.$$

14 5	26 1	3	6	40, 14
9 7	3	4	21 8	30, 21
8	2	19 2	11 10	30, 11
23 9	26	19	32 11	

По този начин третият потребител е задоволен изцяло и $x_{13} = x_{23} = 0$, а от производството на третия производител остават още $a_3 - b_3 = 11$ единици.

Следва клетка (1,1), в която транспортният разход е $c_{11} = 5$. Имаме

$$x_{11} = \min\{14,23\}=14,$$

с което производството на първия производител е изчерпано и $x_{13} = x_{14} = 0$, а първият потребител трябва да получи още 9 единици: $23 - 14 = 9$.

За клетката (2,1) имаме

$$x_{21} = \min\{30,9) = 9,$$

след което $x_{31} = 0$.

По същия начин намираме

$$x_{24} = \min\{21,32) = 21 \quad \text{и} \quad x_{34} = \min\{11,11\} = 11.$$

С това началното базисно решение е намерено и то се съдържа в матрицата

$$X_1 = \left\| \begin{matrix} 14 & 26 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 19 & 11 \end{matrix} \right\|.$$

Функционална стойност на целевата функция, отговаряща на това решение е

$$Z(X_1) = 14.5 + 26.1 + 9.7 + 21.8 + 19.2 + 11.10 = 475.$$

б) *Правило на северозападния ъгъл.*

Получаването на начално базисно решение по този метод започва с попълването на клетката, намираща се в левия горен ъгъл на таблицата, откъдето и името на метода.

За същата задача 161 имаме последователно

$$x_{11} = \min\{40,23\}=23, \quad x_{21} = x_{31} = 0.$$

5 23	1 17	3	6	40, 17
7	3 9	4 19	8 2	30, 21, 2
8	2	2	10 30	30
23	26 9	19	32 30	

От производството на първия производител остават още 17 единици: 40-23=17. Следващата клетка е (1,2), за която имаме

$$x_{12} = \min\{17,26\} = 17, \quad x_{13} = x_{14} = 0;$$

вторият потребител трябва да получи още 9 единици: 26-17=9. За клетката (2,2) намираме

$$x_{22} = \min\{30,9\}=9, \quad x_{32} = 0;$$

от производството на втория производител остават още 21 единици: 30-9=21. По-нататък имаме

$$x_{23} = \min\{21,19\}=19, \quad x_{33} = 0;$$

от производството на втория производител остават още 2 единици: 21 – 19 = 2.

За клетката (2,4) получаваме

$$x_{24} = \min\{30,2\}=2,$$

при което четвъртият потребител се нуждае от още 30 единици: 32-2=30. Най-сетне определяме

$$x_{34} = \min\{30,30\}=30,$$

с което е намерено началното базисно решение:

$$X_1^* = \begin{Vmatrix} 23 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 19 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{Vmatrix}.$$

Съответната функционална стойност е

$$Z(X_1^*) = 23.5 + 17.1 + 9.3 + 19.4 + 2.8 + 30.10 = 551.$$

Намирането на начално базисно решение по метода на северозападния ъгъл става без отчитане размера на транспортните разходи, което най-често води до големи отклонения от оптималното решение на задачата. В случая

$$Z(X_1) = 475 < 551 = Z(X_1^*).$$

При ръчно решаване на задачите от този тип се препоръчва правилото на минималните разходи. Методът на северозападния ъгъл се прилага при електронноизчислителната техника, защото програмата при него е по-проста в сравнение с програмата, отчитаща размера на транспортните разходи.

*****

Получените начални решения X_1 и X_1^* са неизродени базисни решения, защото всяко от тях съдържа $m+ n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ положителни координати.

*****

Когато дадено базисно решение има по-малко от $m + n - 1$ положителни координати, то се нарича изродено.

3.6.3.2. Критерий за оптималност

Вторият етап при решаването на транспортните задачи се състои в това да се установи дали дадено решение е оптимално или не е оптимално. При метода на потенциалите критерият за оптималност се изразява в следното.

Въвеждат се величините

$$u_1, u_2, \dots, u_m,$$

които се съпоставят на всеки от редовете (на всяко уравнение от системата (2)) и величините

$$v_1, v_2, \dots, v_n,$$

които се съпоставят на всеки от стълбовете (на всяко уравнение от систематата (3)). Тези величини се наричат *потенциали* и стойностите им подлежат на определяне, което ще обясним по-долу.

Чрез потенциалите се образуват величините

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad i = 1 \div \mathrm{m}, \ \mathrm{j} = 1 \div \mathrm{n},$$

които се съпоставят на всяка клетка. Тези величини се наричат *характеристики.*

Потенциалите се определят от системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1 \ = 0 \\ \Delta_{ij} = 0. \end{array} \right.$$

Участващите характеристики в тази система отговарят на базисните неизвестни, т. е. тези от неизвестните, които имат положителни стойности. Броят на базисните базисните е m + n - 1, когато решението е неизродено, така че тази система има m + n уравнения, колкото е броят на всички потенциали. По този начин определянето на потенциалите става еднозначно.

Критерият за оптималност се изразява в следното

Когато се търси минимум

1. **Ако всички** $\Delta_{ij} \le 0, i = 1 \div$ **m, j = 1 ÷ n, решението е оптимално.**

2. **Ако съществува поне една** $\Delta_{ij} > 0,$ **решението не е оптимално.**

Когато се търси максимум

1. **Ако всички** $\Delta_{ij} \ge 0, i = 1 \div$ **m, j = 1 ÷ n, решението е оптимално.**

2. **Ако съществува поне една** $\Delta_{ij} < 0,$ **решението не е оптимално.**

Сега ще приложим този критерий към решението X_1 от задача 161.

За удобство вляво на всеки ред и над всеки стълб в таблицата се поставя стойността на всеки потенциал. Системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1 \ = 0 \\ \Delta_{ij} = 0, \end{array} \right.$$

в която участват характеристиките, които отговарят на базисните неизвестни, има вида

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_1 + v_1 - c_{11} = 0 \\ u_1 + v_2 - c_{12} = 0 \\ u_2 + v_1 - c_{21} = 0 \\ u_2 + v_4 - c_{24} = 0 \\ u_3 + v_3 - c_{33} = 0 \\ u_3 + v_4 - c_{34} = 0 \end{cases}$$

Тя се решава лесно поради опростената структура на уравненията ѝ. Във второто уравнение се замества с $u_1 = 0$ и тъй като $c_{11} = 5$, то $v_1 = 5$. Със стойностите $u_1 = 0$ и $c_{12} = 1$ от третото уравнение се получава $v_2 = 1$. От четвъртото уравнение, понеже $v_1 = 5$ и $c_{21} = 7$, намираме $u_2 = 2$ и т. н.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 1$	$v_3 = -2$	$v_4 = 6$
$u_1 = 0$	14 (5)	26 (1)	(3)	(6)
$u_2 = 2$	9 (7)	(3)	(4)	21 (8)
$u_3 = 4$	(8)	(2)	19 (2)	11 (10)

След като са определени всички потенциали, ще намерим характеристиките, отговарящи на свободните неизвестни – тези, които в решението X_1 имат нулеви стойности:

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 - 3 = -5 < 0, \\ \Delta_{14} &= u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 6 = 0, \\ \Delta_{22} &= u_2 + v_2 - c_{22} = 2 + 1 - 3 = 0, \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 2 - 2 - 4 = -4 < 0, \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 5 - 8 = 1 > 0, \\ \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 4 + 1 - 2 = 3 > 0. \end{aligned}$$

От наличието на положителните характеристики $\Delta_{31} = 1$ и $\Delta_{32} = 3$ следва, че решението X_1 не е оптимално.

3.6.3.3. Преход към по-добро базисно решение

Определение. *Обход (цикъл, контур) на дадена празна клекта е затворена начупена линия, образувана от последователно редуващи се хоризонтални и вертикални отсечки. Върховете им отговарят на пълни клетки с изключение на началната празна клетка.*

В сила са следните твърдения.

T$_1$. *Всеки обход има четен брой върхове.*

T$_2$. *Във всяко неизродено решение всяка празна клетка има точно един обход.*

След като се установи, че дадено решение не е оптимално, за да се намери по-добро решение, се прилага следния алгоритъм.

1^0. *Избира се най-голямата положителна характеристика при минимум (най-малката от отрицателните при максимум). За определеност, ако се търси минимум нека това е характеристиката* $\Delta_{kl} > 0$ *(ако се търси максимум, нека това е* $\Delta_{kl} < 0$).

2^0. *На клетката (k,l) се построява съответния обход.*

3^0. *Върховете на обхода се снабдяват последователно със знаци "+" и "-". Започва се от началната клетка (k, l) с "+" и в следващите клетки от обхода знаците се сменят алтернативно. Това символично показва, че клетките с "+" подлежат на увеличение, а клетките с "-" - на намаляване.*

4^0. *Определя се величината* θ, *която е равна на най-малкото от количествата, които се намират в клетките от обхода, снабдени със знака "-". Величината* θ *се прибавя към количествата, намиращи се в клетките със знак "+" и се изважда от количествата, намиращи се в клетките със знак "-". Количествата, намиращи се в клетки, които не са участвали в обхода, остават без промяна.*

5^0. *Функционалната стойност, отговаряща на новото подобрено решение* X_2 *се определя по формулата*

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta.\Delta_{kl}.$$

Сега ще продължим решаването на задача 161.

По-голямата от двете положителни характеристики е $\Delta_{32} = 3$. Обходът на клетката (3,2) е проследен в таблицата със съответвните знаци.

14^{+}	26^{-}		
9^{-}			21^{+}
	$^{+}$	19	11^{-}

Величината θ е равна на

$$\theta = \min\{26, 9, 11\} = 9.$$

Това количество се изважда от клетките със знак "-" и се прибавя към клетките със знак "+". Така се получава новото подобрено базисно решение

$$X_2 = \begin{Vmatrix} 23 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 9 & 19 & 2 \end{Vmatrix}$$

с функционална стойност

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta.\Delta_{32} = 475 - 9.3 = 448.$$

Прилагаме критерия за оптималност към решението X_2. Определяме новите потенциали от системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{ij} = 0, \end{array} \right.$$

в която характеристиките Δ_{ij} отговарят на всички $x_{ij} > 0$. Тези потенциали са нанесени в таблицата.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	5 23	− 1 17	3	+ 6
$u_2 = -1$	7	3	4	8 30
$u_3 = 1$	8	+ 2 9	2 19	− 10 2

От характеристиките Δ_{ij}, отговарящи на свободните неизвестни ($x_{ij} = 0$), само $\Delta_{14} = 0 + 9 - 6 = 3$ е положителна. Обходът на клетката (1,4) е проследен в таблицата със съответните знаци. Количеството θ в случая е равно на

$$\theta = \min\{17, 2\} = 2.$$

Чрез изваждане на $\theta = 2$ от клетките със знак “-“ и прибавяне към клетките със знак “+” се получава новото подобрено решение

$$X_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 23 & 15 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 11 & 19 & 0 \end{array} \right\|$$

с функционална стойност

$$Z(X_3) = Z(X_2) - \theta.\Delta_{14} = 448 - 3.2 = 442.$$

Отново прилагаме критерия за оптималност към решението X_3. Всички потенциали са нанесени в поредната таблица.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 6$
$u_1 = 0$	23 (5)	15 (1)	(3)	2 (6)
$u_2 = 2$	(7)	(3)	(4)	30 (8)
$u_3 = 1$	(8)	11 (2)	19 (2)	(10)

Всички характеристики, които съответстват на свободните неизвестни, отговарят на условието $\Delta_{ij} \le 0$. Това показва, че X_3 е оптимално решение.

$$X_{opt} = X_3, \quad Z_{min} = Z(X_{opt}) = 442.$$

От $\Delta_{21} = 0$ се разбира, че това оптимално решение не е единствено. Ако проследим обхода на клетката $(2,1)$ и след това направим съответното преразпределение, се получава ново оптимално базисно решение

$$X_3^* = \begin{Vmatrix} 0 & 15 & 0 & 25 \\ 23 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 11 & 19 & 0 \end{Vmatrix}$$

със същата функционална стойност $Z(X_3^*) = 442$. Всяка изпъкнала линейна комбинация от двете оптимални базисни решения X_3 и X_3^* ще бъде също оптимално (небазисно) решение на задачата.

От

$$X_3^{**} = (1-k)X_3 + kX_3^*, \; 0 \le k \le 1,$$

при различни стойности на параметъра k могат да се получат още безброй много оптимални решения. Така например при $k = \frac{1}{3}$ се получава оптималното решение

$$X_3^{**} = \begin{Vmatrix} \frac{46}{3} & 15 & 0 & \frac{29}{3} \\ \frac{23}{3} & 0 & 0 & \frac{67}{3} \\ 0 & 11 & 19 & 0 \end{Vmatrix}$$

със същата функционална стойност $Z(X_3^{**}) = 442$.

Случаят, свързан с безброй много оптимални решения, който тук разгледахме е аналогичен на случая, който имахме в задача 148.

*****

Математическият модел и метод на транспортната задача могат да се използват в редица разнообразни задачи, които нямат нищо общо с транспорт. Такава е следващата задача.

162. Пет души кандидатстват за три работни места. На проведен тест за ефективността от дейността на всеки от кандидатите са получени оценки, които са включени в таблицата. Да се намери това разпределение на кандидатите, при което общата ефективност ще бъде най-голяма.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
M_1	6	5	9	5	4	1
M_2	8	7	10	8	7	1
M_3	8	9	8	8	10	1
	1	1	1	1	1	

Решение: Задачата е от транспортен тип с *двоични променливи:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad i = 1 \div 3,\; j = 1 \div 5.$$

От неравенството $\sum_{i=1}^{3} a_i = 3 < 5 = \sum_{j=1}^{5} b_j$ се разбира, че задачата е с нарушен баланс. За целта въвеждаме *изкуствен ред*, който отговаря на две *фиктивни* работни места ("производство" $a_4 = 2$). Оценките в него ("транспортните разходи") са равни на нула. В задачата се търси максимум, затова при определяне на началното базисно решение ще се ръководим от *правилото на максималните транспортни разходи*, т. е. ще бъдат попълвани най-напред клетките с най-високи оценки.

Започваме с клетка (2,3), в която

$$c_{23} = \max_{i,j}\{c_{ij}\} = 10\,.$$

Получаваме $x_{23} = 1$, при което се изчерпва едновременно втория ред и третия стълб. В такъв случай ще се получи изродено базисно решение, затова въвеждаме *фиктивна нула,* която се поставя в празна клетка от втория ред или

6	5	9	5	4	1
8	7	10	8	7	1
8	9	8	8	10	1
0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	1	

от третия стълб. Препоръчва се попълването на фиктивната нула да стане при максимум в клетка с по-висок транспортен разход, а при минимум в клетка с по-нисък транспортен разход. В случая избираме за *базисна (фиктивна) нула* $x_{13} = 0$ и таксуваме тази неизвестна като базисна.

Продължаваме с $x_{35} = 1$. Отново се изчерпват едновременно както третия ред, така също и петия стълб, затова за фиктивна базисна неизвестна въвеждаме $x_{32} = 0$. Остават $x_{42} = x_{44} = 1$, с което е получено началното базисно (изродено) решение:

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

с функционална стойност

$$Z(X_1) = 1.6 + 1.10 + 1.10 + 1.0 + 1.0 = 26.$$

Полученото решение е изродено, защото положителните му координати са 5, а $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$.

Прилагаме критерия за оптималност, като образуваме системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

в която характеристиките Δ_{ij} отговарят на базисните неизвестни. Стойностите на потенциалите са нанесени в таблицата.

	$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 9$	$v_4 = 5$	$v_5 = 6$
$u_1 = 0$	$-$ 6 1	5 0	$+$ 9 0	5	4
$u_2 = 1$	$+$ 8	7	$-$ 10 1	8	7
$u_3 = 4$	8	9 0	8	8	10 1
$u_4 = -5$	0	0 1	0	0 1	0

Характеристиките, които са отрицателни са три:

$$\Delta_{21} = 1 + 6 - 8 = -1,$$

$$\Delta_{22} = 1 + 5 - 7 = -1,$$

$$\Delta_{24} = 1 + 5 - 8 = -2.$$

Ако се построят обходите на клетките (2,2) и (2,4), за величината θ се получава стойност нула (проверете!), което показва, че x_{22} и x_{24} не могат да станат базисни неизвестни. В обхода на клетка (2,1) се получава (знаците са отразени в таблицата)

$$\theta = \min\{1,1\} = 1.$$

Това количество се изважда от клетките (1,1) и (2,3) и се прибавя към клетките (1,3) и (2,1). След тези преобразувания се получава новото подобрено базисно решение

$$X_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

с функционална стойност

$$Z(X_2) = Z(X_1) - \theta.\Delta_{21} = 26 - 1(-1) = 27.$$

Понеже X_2 е изродено решение, приемаме $x_{23} = 0$ за нова фиктивна базисна неизвестна и запазваме като фиктивни базисни неизвестни също така $x_{12} = 0$ и $x_{32} = 0$. От системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \Delta_{ij} = 0, \end{array} \right.$$

в която характеристиките отговарят на базисните неизвестни, намираме стойностите на потенциалите, които са нанесени в поредната таблица.

	$v_1 = 7$	$v_2 = 5$	$v_3 = 9$	$v_4 = 5$	$v_5 = 6$
$u_1 = 0$	6	5 0	9 1	5	4
$u_2 = 1$	8 1	7	10 0	8	7
$u_3 = 4$	8	9 0	8	8	10 1
$u_4 = -5$	0	0 1	0	0 1	0

От характеристиките, отговарящи на свободните неизвестни, само

$$\Delta_{22} = 1 + 5 - 7 = -1$$

е отрицателна, но при обхода на клетката (2,2) стойността на величината θ е равна на нула, така че промяна в елементите на решението X_2 няма да настъпи. Това показва, че X_2 е търсеното оптимално решение:

$$X_{opt} = X_2, \quad Z_{max} = Z(X_{opt}) = 27.$$

Оптималното решение показва, че първият, третият и петият кандидати трябва да бъдат назначени съответно на второто, първото и третото работно място. Вторият и четвъртият кандидати отпадат.

163. Задачата

1	2	2	3	11
4	5	6	11	11
5	7	9	12	11
10	8	12	13	11
17	9	10	8	

решете на:

а) минимум; б) максимум.

Установете, че и в двата случая оптималните решения не са единствени. Намерете второ оптимално решение.

Отг.: а) $X_{1opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $X_{2opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & 7 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $Z_{min} = 235$;

б) $X_{1opt} = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $X_{2opt} = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $Z_{max} = 326$.

164. Да се намери най-рационално разпределение на 5 багера от различен тип на 5 обекта, ако времето необходимо на всеки от багерите за изкопните работи на съответните обекти е дадено в таблицата.

	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$	
O_1	47	66	85	92	13	1
O_2	13	33	70	71	26	1
O_3	71	7	86	17	59	1
O_4	23	63	20	97	97	1
O_5	39	63	4	87	45	1
	1	1	1	1	1	

Отг.: $X_{opt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $Z_{min} = Z(X_{opt}) = 90$.

В практиката си всеки може да намери и други приложения на задачите от транспортен тип в [1], [6] и [7].

Тест за самоподготовка

1. Оптималното решение на задачата

$$\min\{Z(X) = 4x_1 + 3x_2\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{array} \right.$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

е:

а) $X_{opt} = (4, 5), Z_{min} = 31$; б) $X_{opt} = (5, 6), Z_{min} = 38$;

в) $X_{opt} = (5, 4), Z_{min} = 32$; г) $X_{opt} = (6, 4), Z_{min} = 36$.

2. Оптималното решение на задачата

$$\max\{Z(X) = 2x_1 + x_2 + 20x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 8x_6\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 \quad - x_3 \quad + 4x_5 + x_6 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \quad + 3x_5 \quad = 12 \\ x_1 \quad + 4x_3 + x_4 - 2x_5 \quad = 34 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0, j = 1 \div 6$

е:

а) $X_{opt} = (0, 0, 6, 0, 10, 7), Z_{max} = 236$; б) $X_{opt} = (4, 0, 8, 0, 12, 0), Z_{max} = 240$;

в) $X_{opt} = (0, 20, 0, 30, 0, 10), Z_{max} = 280$; г) $X_{opt} = (10, 0, 8, 0, 12, 0), Z_{max} = 228$.

3. Оптималното решение на задачата

$$\min\{Z(X) = 10x_1 + 16x_2 + x_3 + 3x_4\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \quad = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 16 \\ 5x_1 + x_2 \quad + x_4 \geq 10 \end{array} \right.$$

$x_j \geq 0, j = 1 \div 4$

е:

а) $X_{opt} = (\frac{1}{2}, 1, 0, 1), Z_{min} = 24$; б) $X_{opt} = (2, 0, 10, 0), Z_{min} = 30$;

в) $X_{opt} = (5, 1, 0, 0)$, $Z_{min} = 66$;   г) $X_{opt} = (1, 1, 1, 0)$, $Z_{min} = 27$.

4. Намерете оптималното решение на дуалната на задачата

$$\max\{Z(X) = 2x_1 + 3x_2\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1 - 3x_2 \le 5 \\ -x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 6 \end{array}\right.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

а) $Y_{opt} = (1, 0, 4)$, $F_{min} = 31$;   б) $Y_{opt} = (0, 1, 3)$, $F_{min} = 16$;
в) $Y_{opt} = (4, 1, 0)$, $F_{min} = 18$;   г) $Y_{opt} = (1, 0, 3)$, $F_{min} = 23$.

5. Решете на минимум транспортната задача

3	4	6	5	30
4	3	8	7	40
2	5	4	5	45
20	30	30	35	

а) $X_{opt}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & 5 & 5 \\ 20 & 0 & 25 & 5 \end{Vmatrix}$, $Z_{min}=455$;   б) $X_{opt}=\begin{Vmatrix} 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 35 \end{Vmatrix}$, $Z_{min}=440$;

в) $X_{opt}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 5 & 30 & 0 & 5 \\ 15 & 0 & 30 & 0 \end{Vmatrix}$, $Z_{min} = 445$;   г) $X_{opt}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 30 & 5 \\ 20 & 25 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $Z_{min}=460$.