ВТОРИ РАЗДЕЛ

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

Ключови понятия към глави 2.1. – 2.4.

Вектор
Скаларно произведение на два вектора
Линейна комбинация на вектори
Линейна зависимост и линейна независимост на вектори
Матрица
Комутативност на матрици
Детерминанта
Поддетерминанта и адюнгирано количество на даден елемент
Стойност на детерминанта
Свойства на детерминантите
Особена и неособена матрица

2.1. Вектори. Действия с вектори. Линейна зависимост и линейна независимост на система вектори. Базис

След усвояване на материала от главите 2.1. – 2.4. ще знаете:

- **какво е n-мерен вектор;**
- **какво е линейна комбинация от вектори;**
- **как се намира скаларното произведение на два вектора;**
- **свойствата на система от вектори;**
- **коя система от вектори е линейно зависима или линейно независима;**
- **какво е базис в n-мерното векторно пространство;**
- **какво е матрица и как се извършват действията с матрици;**
- **какво е детерминанта;**
- **какво е поддетерминанта и адюнгирано количество на даден елемент;**
- **как се определя стойността на всяка детерминанта;**
- **кои са свойствата на детерминантите.**

Всяка наредена съвкупност от n числа $(a_1,a_2, \dots , a_n)$, където n е естествено число, се нарича *n-мерен вектор.* Числото n се нарича *размерност на вектора,* а числата $a_1, a_2, \dots , a_n$ – *координати на вектора.*

Множеството от всички n-мерни вектори образуват n-*мерното векторно пространство.*

Векторите ще означаваме с главни букви.

Равенство на вектори. Ако са дадени два вектора с еднаква размерност

$$A=(a_1, a_2, \dots , a_n), \quad B = (b_1, b_2, \dots , b_n),$$

е в сила $A = B$, ако са изпълнени равенствата $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Релацията $A \le B$ е в сила, ако са изпълнени неравенствата $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \dots, a_n \le b_n$.

Събиране на вектори. Сумата $A + B$ е векторът

$$A + B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n).$$

Умножение на вектор с число. Произведението $кA$ на реалното число $к$ с вектора A е векторът

$$кA=(кa_1, кa_2, \dots, кa_n).$$

В сила е равенството $кA = Aк$.

Ако $к=0$ се получава *нулевият вектор* $O=(0, 0, \dots, 0)$.

Ако $к=-1$, векторът $(-1)A= -A=(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ се нарича *противоположен* на вектора A.

Ако $A_1, A_2, \dots, A_m$ са n-мерни вектори, m е естествено число, а $к_1, к_2, \dots, к_m$ са реални числа, векторът

$$к_1A_1+к_2A_2+ \dots + к_mA_m$$

се нарича *линейна комбинация* от векторите $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Линейната комбинация

$$1.A + (-1)B = A – B = (a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_n-b_n)$$

се нарича *разлика на векторите* A и B.

Дължина на вектора $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ се нарича неотрицателното число

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\ .$$

Скаларно произведение на двата вектора $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ се нарича числото

$$AB = a_1b_1+a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\ .$$

В сила е равенството $AB = BA$.

68. Дадени са векторите

$$A=(2,-1,3,7),\ \ B=(-4,7,-5,6),\ \ C=(1,2,-3,-4).$$

Намерете векторите:

а) 3A; б) -4B; в) A+B; г) A-B; д) 2A-3B; е) 4A-2B+3C.

Отговор: а) (6,-3,9,21); б) (16,-28,20,-24); в) (-2,6,-2,13); г) (6,-8,8,1); д) (16,-23,21,-4); е) (19,-12,13,4).

69. Ако са дадени векторите $A=(3,-2,5)$ и $C=(3,8,1)$, намерете вектор B, така че да е в сила равенството $2A-3B=C$.

Решение. Векторът B е линейна комбинация на векторите A и C:

$$B = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}C,$$

така че

$$B= \frac{2}{3}(3,-2,5) - \frac{1}{3}(3,8,1) = (2,-\frac{4}{3},\frac{10}{3}) - (1,\frac{8}{3},\frac{1}{3}) = (1,-4,3).$$

70. Ако $A=(1,-2,0,-4,5)$, $B=(5,0,-3,2,-1)$, $C=(6,1,3,-2,5)$, намерете дължините на векторите: A, $A-C$ и $B-C$.

Отг.: $|A| = \sqrt{46}$; $|A - C| = \sqrt{47}$; $|B - C| = 3\sqrt{10}$.

71. Намерете скаларното произведение на векторите

а) $A=(-7,3,0,2)$ и $B=(4,1,-8,10)$; б) $M=(1,-2,3,-4,5)$ и $N=(5,4,-3,2,10)$;

в) $P=(6,-1,8,9,4)$ и $Q=(7,6,-3,0,-3)$

Отг.: а) $AB=-7.4+3.1+0(-8)+2.10=-5$; б) $MN=30$; в) $PQ=0$.

72. В магазин има 8 вида стоки, от всеки вид съответно по 9, 13, 12, 10, 11, 15, 20, 19 броя. Печалбата от всеки брой от тези стоки при продажба е съответно 4 лв., 5 лв., 12 лв., 17 лв., 8 лв., 7 лв., 10 лв., 24 лв. Намерете реализираната печалба, ако всички стоки са продадени.

Отг.: 1264 лв.

73. Намерете всички стойности на параметъра a, за които скаларното произведение на векторите $A=(3,1-a,4,-1,a)$ и $B(2,a,a+1,3,3a+5)$ е равно на 35.

Решение: От $AB=35$ се получава квадратното уравнение $a^2+5a-14=0$. Корените му $a=-7$ и $a=2$ са търсените стойности на параметъра.

*****

Определение 1. *Векторите $A_1, A_2, \dots, A_n$ се наричат линейно зависими, ако поне един от тях е линейна комбинация на останалите.*

В противен случай, когато нито един от векторите не е линейна комбинация на останалите, тези вектори се наричат линейно независими.

Определение 2. *Векторите $A_1, A_2, \dots, A_n$ се наричат линейно зависими, ако съществуват числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, поне едно от тях различно от нула, така че да е в сила равенството*

$$c_1A_1+c_2A_2+\dots+c_nA_n=0.$$

В противен случай, когато това равенство е в сила само когато

$$c_1=c_2=\dots=c_n=0,$$

тези вектори се наричат линейно независими.

Двете определения са еквивалентни.

Свойства на системи вектори

1^0. Ако една система вектори съдържа нулевия вектор, тя е линейно зависима.

2^0. Ако една подсистема на система вектори е линейно зависима, то цялата система е линейно зависима.

3^0. Ако една система от вектори е линейно независима, то всяка нейна подсистема е линейно независима.

4^0. Ако $a_{11}\neq 0, a_{22}\neq 0, \dots, a_{ss}\neq 0$, то системата от вектори

$$\begin{array}{c} A_1=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}, \dots, a_{1n}) \\ A_2=(0, a_{22}, \dots, a_{2s}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_s=(0, 0, \dots, a_{ss}, \dots, a_{sn}) \end{array}$$

е линейно независима ($s \le n$).

5^0. Максималният брой линейно независими вектори в n-мерното векторно пространство е n.

Определение. *Всяка система от n линейно независими вектори се нарича* ***базис в*** *n-мерното векторно пространство.*

Определение. *Единичните вектори от n-мерното векторно пространство*

$$\begin{array}{c} E_1=(1,0,\dots,0 \\ E_2=(0,1,\dots,0) \\ \dots\dots\dots \\ E_n=(0,0,\dots,1) \end{array}$$

образуват базис, който се нарича ***единичен базис.***

6^0. Всеки вектор от n-мерното векторно пространство може да се представи като линейна комбинация от векторите на единичния базис.

Следващотоо свойство е обобщение на свойство 6^0 :

7^0. Всеки вектор от дадено векторно пространство може да се представи, и то по единствен начин, като линейна комбинация от векторите на кой да е базис в това пространство.

В тримерното векторно пространство освен единичните вектори

$$E_1=(1,0,0),\ E_2=(0,1,0),\ E_3=(0,0,1),$$

според свойство 4^0 базис образуват още и следните две системи вектори:

$$A_1=(5,-3,4),\ A_2=(0,8,9),\ A_3=(0,0,-2);$$

$$B_1=(7,4,-6),\ B_2=(0,3,-9),\ B_3=(0,0,7).$$

Пример: Векторът A=(6,-4,9) се представя във вида

$$A=(6,-4,9)=6(1,0,0)-4(0,1,0)+9(0,0,1)= 6E_1-4E_2+9E_3.$$

Числата 6, -4, 9 се наричат координати на вектора A спрямо единичния базис.

75. Да се представи вектора A=(4,-7,22) като линейна комбинация на векторите $B_1=(2,1,5)$, $B_2=(0,3,4)$, $B_3=(0,0,6)$.

Решение: Според свойство 4^0 векторите B_1, B_2, B_3 образуват базис в тримерното векторно пространство. За да представим вектора A във вида

$$A = к_1B_1 + к_2B_2 + к_3B_3,$$

(според свойство 7^0 такова представяне съществува и е единствено), нужно е да определим числата $к_1$, $к_2$, $к_3$.

От първите координати на векторите A, B_1, B_2, B_3 получаваме $4=2к_1$ или $к_1=2$. От вторите координати на тези вектори имаме $-7= к_1+3к_2$ и тъй като $к_1=2$, то $к_2=-3$. От третите координати намираме $22 = 5к_1 + 4к_2 + 6к_3$. Но $к_1=2$ и $к_2=-3$, така че $к_3=4$. Следователно

$$A = 2B_1 - 3B_2 + 4B_3.$$

Числата 2, -3, 4 се наричат координати на вектора A спрямо базиса B_1, B_2, B_3, а числата 4, -7, 22 – координати на вектора A спрямо единичния базис E_1, E_2, E_3.

76. Определете координатите на вектора X=(3,-14,4) спрямо базиса $A_1(1,-3,4)$, $A_2=(0,5,-2)$, $A_3(0,0,-2)$.

Отг.: (3,-1,5).

77. Ако Ако A, B, C са n-мерни вектори, O е нулевият вектор, а λ е произволно реално число, докажете, че са в сила зависимостите

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A - A = O$$

$$AO = OA = 0$$

$$A^2 = AA \geq 0.$$

78. Установете линейно зависими или линейно независими са системите вектори

а) $A_1=(2,4,5)$, $A_2=(3,-1,6)$, $A_3=(1,9,4)$

б) $B_1=(3,-2,8)$, $B_2=(4,1,-5)$, $B_3=(2,-6,1)$

Решение: а) **Първи начин:** Според второто определение за линейна зависимост на вектори образуваме векторното равенство

$$к_1A_1+к_2A_2+к_3A_3 = O.$$

Трябва да се отговори на въпроса това равенство в сила ли е когато поне едното от трите числа е различно от нула?

От първите координати на векторите имаме

$$2к_1+3к_2+к_3=0,$$

а от вторите и третите координати получаваме

$$4к_1-к_2+9к_3=0$$
$$5к_1+6к_2+4к_3=0.$$

Определяме от второто уравнение $к_2=4к_1+9к_3$ и го заместваме в другите две уравнения:

$$2к_1+3(4к_1+9к_3)+к_3=0$$
$$5к_1+6(4к_1+9к_3) +4к_3=0.$$

След опростяване получаваме две еднакви уравнения:

$$к_1+2к_3=0$$
$$к_1+2к_3=0.$$

Ако приемем $к_3=1$, получаваме $к_1=-2$, а чрез тези стойности от $к_2=4к_1+9к_3$ намираме $к_2=1$. Така установихме, че е в сила зависимостта

$$-2A_1+A_2+A_3=O,$$

което показва, че векторите са линейно зависими.

Втори начин: Използвайте свойство 4^0 на детерминантите от 2.4. и задача 99.

б) **Първи начин:** От зависимостта

$$к_1B_1+к_2B_2+к_3B_3=O$$

получаваме хомогенната система линейни уравнения

$$3к_1+4к_2+2к_3=0$$
$$-2к_1+к_2-6к_3=0$$
$$8к_1-5к_2+к_3=0.$$

Определяме $к_3=-8к_1+5к_2$ от третото уравнение и заместваме с него в другите две:

$$3к_1+4к_2+2(-8к_1+5к_2)=0$$
$$-2к_1+к_2-6(-8к_1+5к_2)=0,$$

откъдето получаваме две уравнения за $к_1$ и $к_2$:

$$-13к_1+14к_2=0$$
$$46к_1-29к_2=0.$$

Със стойността $к_2=\frac{13}{14}к_1$ от първото уравнение заместваме във второто и получаваме

$$к_1(46 - \frac{29.13}{14})=0,$$

което показва, че $к_1=0$. От $к_2=\frac{13}{14}к_1$ намираме $к_2=0$, а от $к_3=-8к_1+5к_2$ следва $к_3=0$. Числата $к_1$, $к_2$ и $к_3$ могат да имат само нулеви стойности, което показва, че векторите B_1, B_2 и B_3 са линейно независими.

Втори начин: Използвайте свойство 4^0 на детерминантите от 2.4. и задача 99.

79. Установете образуват ли базис векторите

а) $A_1= (3,1,5)$ б) $B_1= (1,6,-4)$
$A_2= (6,4,-2)$ $B_2= (2,5,-2)$
$A_3= (8,5,3)$ $B_3= (4,3,2)$.

Отг.: а) Образуват базис, защото са линейно независими; б) Не образуват базис, защото $B_3= -2B_1+3B_2$.

2.2. Матрици. Видове матрици. Действия с матрици

Правоъгълната таблица от числа

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{Vmatrix},$$

която има m реда и n стълба, се нарича *матрица с размери* (m,n). Числата a_{ij}, $i=1\div m$, $j=1\div n$, се наричат *елементи на матрицата*, а m и n са естествени числа.

Съкратено същата матрица може да се запише още така:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i=1\div m, \; j=1\div n.$$

Елементът a_{ij} се намира в i-тия ред и в j-тия стълб на матрицата.

Ако $m = n$, матрицата се нарича *квадратна от ред n,* а ако $m \neq n$, матрицата се нарича *правоъгълна.*

В квадратната матрица с размери (n,n)

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

елементите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуват нейния *главен диагонал.*

Триъгълна матрица е всяка квадратна матрица, на която всички елементи под или над главния диагонал са нули. Такива са матриците

$$M = \begin{Vmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 23 \end{Vmatrix} \quad и \quad N = \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -8 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Диагонална матрица е квадратна матрица, която има различни от нула елементи само по главния диагонал. Такива са матриците

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22} \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \dots a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрицата E се нарича *единична матрица.* Матриците

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad и \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

са единични матрици от втори и трети ред.

Единичните матрици играят основна роля в матричното смятане.

Нулева матрица е всяка матрица, на която всички елементи са нули:

$$O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ако m=1 се получава *матрица вектор ред.* Ако n=1 се получава *матрица вектор стълб.* Матриците

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

са с размери (1,n) и (m,1).

Матриците $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ са равни, ако са с еднакви размери и $a_{ij} = b_{ij}$ за всички индекси $i=1 \div m$ и $j=1 \div n$. Ако поне едно от тези равенства е нарушено, то $A \neq B$. За тези матрици е в сила неравенството $A \leq B$, ако за елементите им са изпълнени неравенствата $a_{ij} \leq b_{ij}$ за всички индекси $i=1 \div m$, $j=1 \div n$. Така например, ако

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ a & b \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 6 \end{Vmatrix},$$

то A = B, ако a=5 и b = 6, а за матриците B и C е в сила неравенството $B \leq C$.

Ако в матрицата A се заменят редовете със съответните стълбове, получената матрица се нарича *транспонирана на* A и се бележи с $A^{/}$. Имаме

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & a & 6 \\ 4 & 3 & b \end{Vmatrix}, \quad A^{/} = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ a & 3 \\ 6 & b \end{Vmatrix}.$$

Симетрична матрица е тази, която е равна на своята транспонирана.

Ако S е симетрична матрица, т. е. $S=S^{/}$, тя трябва да бъде квадратна и за елементите й трябва да са в сила равенствата $a_{ij} = a_{ji}$. Това ще рече, че елементите й, симетрично разположени по отношение на главния диагонал са равни.

Така например, симетрични са матриците

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad S = \begin{Vmatrix} 5 & -7 & 4 & 9 \\ -7 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 8 & -5 \\ 9 & -1 & -5 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Сума на матриците $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ е матрицата

$$A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \|.$$

Произведение на матрицата $A = \| a_{ij} \|$ с реалното число к е матрицата

$$кA = Aк = \| ka_{ij} \|.$$

80. Намерете матриците A + B и A – B, ако

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 6 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -9 & 2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{Vmatrix}.$$

$$\text{Отг.: } A + B = \begin{Vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 6 \\ 14 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A - B = \begin{Vmatrix} 13 & -5 \\ -3 & 6 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}.$$

81. Намерете матрицата C = 3A – 2B, ако A и B са матриците от задача 80.

$$\text{Отг.: } C = \begin{Vmatrix} 30 & -13 \\ -8 & 18 \\ 7 & 21 \end{Vmatrix}$$

82. Ако $A = \begin{Vmatrix} a+1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & -b \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & a \\ -1 & 2 & a \\ 3 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 2-a & 1 & 3a+6 \\ -7 & 7 & 3a-14 \\ -1 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$

определете стойностите на параметрите a и b, за които матрицата $2A^{/}-3B+C$ е равна на единичната матрица.

Решение: Зависимостта $2A^{/} -3B +C = E$ е изпълнена, ако

$$2A^{/}-3B+C = \begin{Vmatrix} a-5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9-2b \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

откъдето a = 6, b = 4.

Произведение на матрици. Нека матрицата A е с размери (m,n), а матрицата B е с размери (n,p). Представяме A чрез нейните вектор редове, а B чрез нейните вектор стълбове:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots\cdots \\ A_m \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_p \end{Vmatrix}.$$

Под *произведение на матриците* A и B (A е ляв множител, а B е десен множител) се разбира матрицата C = AB, която е с размери (m,p) и е равна на

$$C = AB = \begin{Vmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \ldots & A_mB_p \end{Vmatrix}.$$

Елементът A_iB_j , i=1÷m, j=1÷n, на матрицата C, който се намира в i-тия ред и в j-тия стълб, е равен на скаларното произведение на векторите A_i и B_j , които се намират съответно в i-тия ред на матрицата A и в j-тия стълб на матрицата B.

Равенството между броя на стълбовете на матрицата A, която е ляв множител в произведението и броя на редовете на матрицата B, която е десен множител, е условие за съществуване на произведението AB.

Ако за две матрици A и B е в сила равенството AB = BA, те се наричат комутативни.

83. Намерете произведението AB на матриците

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение :

$$AB = \begin{Vmatrix} 3.2+7(-4)-2.6+4.2 & 3(-3)+7.5-2.7+4.1 \\ 1.2-5(-4)+0.6+8.2 & 1(-3)-5.5+0.7+8.1 \\ 6.2+5(-4)+4.6+3.2 & 6(-3)+5.5+4.7+3.1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -26 & 16 \\ 38 & -20 \\ 22 & 38 \end{Vmatrix}.$$

84. Намерете произведението BA, ако A и B са матриците от задача 83.

Отг.: BA не съществува.

85. Установете комутативни ли са матриците

а) $A = \begin{Vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$ и $B = \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}$;

б) $M = \begin{Vmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 3 \end{Vmatrix}$ и $N = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 6 \end{Vmatrix}$;

в) $P = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{Vmatrix}$ и $Q = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{Vmatrix}$.

Решение: а) $AB = \begin{Vmatrix} 41 & -5 \\ 13 & 29 \end{Vmatrix}$, $BA = \begin{Vmatrix} 40 & -6 \\ 9 & 30 \end{Vmatrix}$. $AB \neq BA$, следователно A и B не са комутативни матрици.

б) $MN = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $NM = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. $MN = NM$. От това равенство заключаваме, че M и N са комутативни матрици.

Отг.: в) P и Q са комутативни матрици.

86. Ако A, B, C са матрици, E е единичната матрица, O е нулевата матрица, а λ и μ са произволни реални числа, обосновете, че са в сила зависимостите:

$$(A')' = A;$$
$$(A+B)' = A' + B';$$
$$(\lambda A)' = \lambda A';$$
$$(\lambda A)(\mu B) = \lambda\mu AB;$$
$$E' = E;$$
$$(AB)' = B'A';$$
$$(A+B)C = AC+BC;$$
$$C(A+B) = CA+CB;$$
$$AE = EA = A;$$
$$AO = OA = O;$$
$$A+O = O+A = A.$$

Предполага се, че размерите на матриците A, B, C, E и O са такива, че всички означени действия могат да се извършат.

87. Ако $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$, намерете A^2 и A^3.

Решение: $A^2 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{Vmatrix}$; $A^3 = A.A^2 = A^2.A = \begin{Vmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{Vmatrix}$.

2.3. Детерминанти. Пресмятане на детерминанти от втори и трети ред

Нека n^2 числа са разположени в квадратната таблица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тази квадратна таблица, която съдържа n^2 елементи се нарича *детерминанта от n-ти ред.*

Всяка детерминанта има стойност.

Детерминантите от втори ред се изчисляват по формулата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

88. Намерете стойността на всяка от детерминантите

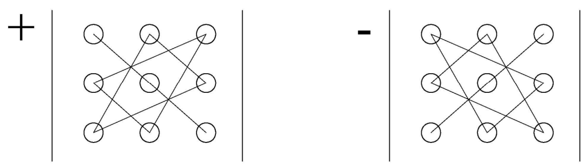
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix},\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}.$$

Отг.: $\Delta_1 = 42;\ \Delta_2 = -47;\ \Delta_3 = -13;\ \Delta_4 = 0.$

Стойността на детерминанта от трети ред може да се намери по няколко начина. Тук ще изложим т. нар. *Правило на триъгълниците.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

За целта се използват двете схеми:



89. Намерете стойността на всяка от детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -5 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение: $\Delta_1 =$ 5.5.2+(-2)(-3)4+7(-2)(-1)-4.5.(-1)-7(-2)2-(-2)(-3)5= 106.

Отг.: $\Delta_2 = 0;\ \Delta_3 = -66.$

90. Намерете лицето на триъгълника с върхове (-1,-4), (7,2), (4,9).

Упътване: От аналитичната геометрия е известно, че лицето S на триъгълник с върхове (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) е равно на

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отг.: S = 37.

91. Определете стойностите на параметъра a, за които точките (-1,-5), (a,-1), (7,a) лежат на една права.

Упътване: От задача 90 е ясно, че трите точки ще лежат на една права, ако

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 7 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отг.: a = -9 и a = 3.

92. Намерете стойността на всяка от детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \sin x & \cos x \\ b & -\cos x & \sin x \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & x & y \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Отг.: $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = 42,\ \Delta_3 = a_0x^2 + a_1x + a_2$.

2.4. Детерминанти от по-висок ред. Поддетерминанта. Адюнгирано количество. Свойства на детерминантите

Ако в една детерминанта от n-ти ред се отстранят елементите на i-тия ред и на j-тия стълб, се получава детерминанта от (n - 1)-ви ред. Тя се бележи с Δ_{ij} се нарича *поддетерминанта на елемента* a_{ij}.

Така например ако в детерминантата от четвърти ред

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

се отстранят третият ред и вторият стълб се получава детерминантата от трети ред

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

която е поддетерминантата на елемента a_{32}.

Адюнгираното количество на елемента a_{ij} е равно на

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

От това определение следва, че

$$A_{ij} = \Delta_{ij}, \text{ когато } i+j \text{ е четно число},$$

$$A_{ij} = -\Delta_{ij}, \text{ когато } i+j \text{ е нечетно число}.$$

93. Пресметнете поддетерминантите Δ_{11} и Δ_{21} и адюнгираните количества A_{11} и A_{21} от детерминантата

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение: $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 110;$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\Delta_{11}=-5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\Delta_{21} = -110.$

*****

Съществува общо правило, по което може да се пресметне стойността на всяка детерминанта, независимо от нейния ред. Това правило гласи:

Стойността на всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от един ред (стълб), умножени с техните адюнгирани количества.

Стойността на детерминанта от четвърти ред, ако се изберат елементите напр. на втория ред, е равна на:

$$\Delta = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}.$$

Това представяне на детерминантата се нарича *развитие на детерминантата.*

Всяка детерминанта от n-ти ред може да се развие по 2n начина – по всеки ред или по всеки стълб.

Да приложим този начин за пресмятане на детерминанти за детерминантата Δ_3 от задача 89, като я развием по елементите на нейния трети ред:

$$\Delta_3 = -5A_{31}+6A_{32}+8A_{33}=-5\Delta_{31} + 6(-\Delta_{32}) + 8\Delta_{33} =$$

$$=-5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=-5(-6-0)-6(4-0)+8(-6-3)=30-24-72= -66.$$

Когато детерминантата е от по-висок ред за препоръчване е при търсене на стойността й да се използват свойствата на детерминантите. Ето някои от тях.

1^0. *Стойността на детерминантата не се променя, ако тя се транспонира, т. е. когато редовете й се заменят със съответните й стълбове.*

Според това свойство редовете и стълбовете са равностойни: всяко свойство изказано за редовете на детерминантата е валидно и за нейните стълбове.

2^0. *При размяна местата на два реда (стълба) детерминантата променя само знака си.*

3^0. *Ако елементите на един ред (стълб) се умножат с едно число, то цялата детерминанта се умножава с това число.*

Според това свойство общият множител на елементите на един ред (стълб) може да се изнесе като множител пред цялата детерминанта.

4^0. *Детерминанта с два равни или пропорционални реда (стълба) има стойност нула.*

По-общо: *ако един ред (стълб) е линейна комбинация на другите редове (стълбове), детерминантата е равна на нула.*

Обратното също е в сила: *ако стойността на една детерминанта е нула, то в нейните редове, както и в нейните стълбове, има линейна комбинация.*

От казаното до тук следва още, че: *ако стойността на една детерминанта е различна от нула, нито един неин ред (стълб) не е линейна комбинация на другите редове (стълбове)* и обратно: *ако нито един ред (стълб) на една детерминанта не е линейна комбинация на другите редове (стълбове), то стойността на тази детерминанта е различна от нула.*

5^0. *Ако към елементите на един ред (стълб) се прибавят елементите на друг ред (стълб) предварително умножени с едно и също число, детерминантата не променя стойността си.*

По-общо: *ако към ред (стълб) се прибави произволна линейна комбинация на други редове (стълбове), детерминантата не променя стойността си.*

6^0. *Ако от едната страна на главния диагонал всички елементи са равни на нула, детерминантата е равна на произведението на елементите по главния диагонал.*

7^0. *За всяка детерминанта е в сила, че сумата от произведенията на елементите на един ред (стълб) умножени със съответните адюнгирани количества на друг ред (стълб) е равна на нула.*

94. Да се пресметне стойността на детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 11 & 3 & -11 \\ 3 & 8 & 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

Решение: Ако развием детерминантата по някой неин ред или стълб (това може да стане по 8 начина), трябва да се пресметнат 4 детерминанти от трети ред. За да намалим обема на изчисленията, прилагаме свойство 5^0. Умножаваме последователно втори ред с 2, -3 и -4 и след това го прибавяме съответно към първия, третия и четвъртия ред. Така получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 10 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 11 & -4 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Сега развиваме получената детерминанта по елементите на третия й стълб:

$$\Delta = 0A_{13} + 1.A_{23} + 0A_{33} + 0A_{43} = 1.(-1)^{2+3}\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 10 & -3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & -4 & 10 \end{vmatrix},$$

т. е. представихме Δ само чрез една детерминанта от трети ред. От елементите на втория стълб изнасяме общия множител 2 (свойство 3^0) :

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 8 & 1 & 1 \\ 11 & -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Получената детерминанта може да се пресметне по правилото на триъгълниците, но ако използваме отново свойство 5^0, ще я сведем само до една детерминанта от втори ред; за тази цел умножаваме втория стълб с -8 и -1 и го прибавяме съответно към първи и трети стълб:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} -41 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 27 & -2 & 12 \end{vmatrix} = -2.1.A_{22} = -2\begin{vmatrix} -41 & -8 \\ 27 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\begin{vmatrix} -41 & -2 \\ 27 & 3 \end{vmatrix} = -24\begin{vmatrix} -41 & -2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -24(-41+18) = 552.$$

95. Намерете стойността на всяка от детерминантите

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 10 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Отг.: $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 56$.

96. Докажете, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Упътване: Развийте детерминантата по елементите на първия стълб. Получава се сумата от двете детерминанти

$$\Delta = a_0 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Първата детерминанта по свойство 6^0 е равна на a_0x^4, а втората детерминанта развийте по елементите на първия й стълб.

97. Решете уравненията

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -13 & 0 & 36 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Отг.: а) x = ±2, x = ±3; б) x = 0, x = -1, x = -2. Вж. зад. 96.

98. Да се пресметнат детерминантите

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}.$$

Отг.: а) (x-y)(y-z)(z-x); б) -16; в) 4.

99. Установете линейно зависими или линейно независими са системите вектори

а) A_1=(3,-2,4)
A_2=(5,1,6)
A_3=(1,-5,2)

б) B_1=(1,2,1,3)
B_2=(0,5,-1,2)
B_3=(3,4,6,5)
B_4= (2,3,1,2).

Решение: а) Детерминантата, образувана от координатите на векторите има стойност нула:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

следователно по свойство 4^0 на детерминантите между тези векторите има линейна комбинация, т. е. те са линейно зависими.

б) Детерминантата, образувана от координатите на векторите има стойност различна от нула:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -66 \neq 0,$$

следователно по свойство 4^0 тези вектори са линейно независими.

100. Намерете стойностите на параметъра а, за които векторите

$$A_1=(3,a,-4), \quad A_2=(a,5,-3), \quad A_3=(-2,17,1)$$

са:

а) линейно зависими;

б) линейно независими.

Отг.: а) а =-64 и а = 2; б) $a \in (-\infty, -64) \cup (-64, 2) \cup (2, \infty)$.

*****

На всяка квадратна матрица А може да се съпостави стойността на нейната детерминанта, която се бележи с detA или с $|A|$.

Ако стойността на детерминантата на една матрица е различна от нула, тази матрица се нарича неособена, а ако детерминантата ѝ е равна на нула, тази матрица се нарича особена.

Така например за матрицата A = $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ имаме detA = $|A|$ = -2 $\neq$ 0, а за матрицата B = $\begin{Vmatrix} -5 & 4 \\ 10 & -8 \end{Vmatrix}$ имаме detB = $|B|$ = 0. Това показва, че матрицата А е неособена, а матрицата В е особена.

101. Установете особена или неособена е всяка от матриците

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 3 & -7 \\ 9 & -21 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & -1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отг.: А и С са особени матрици; В е неособена матрица.

Тест за самоподготовка

1. Ако A_1 =(-3,-7,2,5), A_2 =(-1,2,-3,4), A_3=(6,5,-4,-3), то линейната комбинация $3A_1$-$2A_2$+$4A_3$ е векторът:
а) (12,-7,0,19); б) (17,-5,-4,-5); в) (19,-13,10,5); г) (21,4,-9,17).

2. Стойностите на параметъра к, за които скаларното произведение на векторите A =(к+1,2,-3) и B =(к-2,к,5) е равно на -5, са:
а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) -4 и 3; г) -5 и 2.

3. За коя стойност на параметъра а, векторите
A = (а, 1-а, а+2), B = (3, 2, а), C = (1, 5, -2) са линейно зависими?
а) -2 и $\frac{8}{3}$; б) 1 и $\frac{2}{3}$; в) -2 и 3; г) 2 и 5.

4. Дадени са матриците $A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -5 & 8 & 6 \end{Vmatrix}$ и $B = \begin{Vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 9 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$. Произведението

AB е равно на:
а) $\begin{Vmatrix} 10 & 15 \\ -26 & 19 \\ 30 & 24 \end{Vmatrix}$, б) $\begin{Vmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 31 & 14 \\ 72 & -29 \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} 34 & 27 \\ -21 & 89 \end{Vmatrix}$.

5. Лицето на триъгълника с върхове (-4, -2), (5, 4), (3, 8) е равно на:
а) 24; б) 26; в) 30; г) 31.

6. Стойността на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & 8 & -5 \\ 6 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

е:
а) 37; б) -17; в) 0; г) 23.

Ключови понятия към разделите 2.5. – 2.11.

Обратна матрица
Ранг на матрица
Минор от матрица
Елементарни преобразувания
Метод на Гаус – Жордан
Система линейни уравнения
Система линейни неравенства
Базисно решение

2.5. Обратна матрица

След усвояване на материала от разделите 2.5. – 2.11. ще можете:

- **да намирате обратната на дадена матрица по два различни начина;**
- **да прилагате елементарни преобразувания;**
- **да определяте минори от една матрица;**
- **да определяте ранга на една матрица;**
- **да прилагате метода на Гаус – Жордан;**
- **да решавате матрични уравнения;**
- **да решавате системи линейни уравнения;**
- **да определяте общо решение на система уравнения;**
- **да намирате базисно решение на една система уравнения;**
- **да решавате системи неравенства с две неизвестни по графичен начин.**

Определение. *Ако за дадена матрица А съществува матрица A^{-1}, такава че да са изпълнени равенствата*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

матрицата A^{-1} се нарича обратна на матрицата А.

На въпросите коя матрица притежава обратна и ако такава съществува тя единствена ли е, отговор дава следната

Теорема. *Ако А е квадратна и неособена матрица, тя притежава единствена обратна матрица.*

Намирането на обратната на дадена матрица може да се осъществи по няколко начина. В 2.7. е разгледан един начин, а тук ще изложим т. нар.

Метод на адюнгираната матрица

Този метод се изразява в следното. Ако е дадена матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

която отговаря на условията от последната теорема, то нейната обратна матрица е равна на

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

където $\Delta = \det \mathrm{A}$, а A_{ij} ($i=1\div3$, $j=1\div3$) са адюнгираните количества на съответните елементи на детерминантата на матрицата A.

102. Намерете обратната на матрицата

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{Vmatrix}$$

с метода на адюнгираната матрица

Решение: $\Delta = \det A = -77 \neq 0$,

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -59, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\mathrm{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\mathrm{A}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathrm{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{-1}{77}\begin{Vmatrix} -59 & -14 & 12 \\ -9 & 7 & -6 \\ 22 & 0 & -11 \end{Vmatrix}.$$

103. Намерете обратната на всяка от матриците

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{Vmatrix}.$$

$$\text{Отг.: } \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Свойства на обратната матрица

1. *Обратната на обратна матрица е равна на изходната, т. е.*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. *Детерминантата на обратната матрица е равна на реципрочната стойност на детерминантата на изходната матрица, т. е.*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3. *Обратната матрица на произведение на две матрици е равна на произведението на обратните им матрици, но в обратен ред, т. е.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Това свойство се обобщава за повече от две матрици:

$$(\mathrm{ABC})^{-1} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}.$$

4. Транспонираната на обратна матрица е равна на обратната на транспонираната, т. е.

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

2.6. Ранг на матрица. Елементарни преобразувания

Всяка матрица може да се разглежда като съвкупност от векторите, разположени по редовете ѝ, както и като съвкупност от векторите, разположени по стълбовете ѝ:

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 \dots B_n \end{Vmatrix}.$$

Определение I. *Рангът на една матрица е равен на числото, което показва максималният брой линейно независими вектори от нейните редове (стълбове).*

Рангът на матрицата A се бележи с r или с r_A.

За всяка нулева матрица се приема, че рангът ѝ е равен на нула.

Ако в една матрица има поне един елемент, който е различен от нула, за ранга ѝ е в сила $r \geq 1$.

Ако матрицата A е ненулева и има размери (m, n), рангът ѝ не може да надхвърли по-малкото от числата m и n, т. е.

$$1 \leq r_A \leq \min\{m, n\}.$$

104. Определете ранга на матрицата

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 & 7 \\ 5 & 2 & -1 & 6 & -6 \\ 7 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Vmatrix}.$$

Решение: Векторите A_1 и A_2 са линейно независими, защото координатите им не са пропорционални, но векторите A_1, A_2, A_3 са линейно зависими, защото е в сила линейната комбинация $A_3 = A_1 + A_2$. Тъй като максималният брой линейно независими вектори от редовете на матрицата A е 2, то рангът ѝ е равен на 2, т. е. $r_A=2$.

*****

Един удобен начин за определяне на максималния брой линейно независими вектори в една матрица почива на свойство 4^0 от 2.1. и на понятието *елементарно преобразувание (итерация).*

Елементарни преобразувания (итерации) се наричат следните преобразувания:

а) *размяна местата на два реда;*

б) умножаване елементите на даден ред с число, различно от нула;

в) прибавяне към елементите на даден ред съответните елементи на друг ред, умножени предварително с едно и също число.

Рангът на матрицата не се променя, ако в нея се проведат някои от тези итерации.

Матриците A и B се наричат *еквивалентни,* ако едната се получава от другата с помощта на краен брой итерации. Това се отбелязва с

$$A \sim B.$$

105. Намерете ранга на матрицата

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 15 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 12 & 14 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение: Първият ред се умножава с -2, -3 и -1 и се прибавя съответно към втория, третия и четвъртия ред:

$$B \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -8 & -1 \\ 0 & 6 & -11 & -16 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & 8 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Сега вторият ред се умножава с -3 и 1 и се прибавя съответно към третия и към четвъртия ред:

$$B \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

От първото и от четвъртото свойство на системите вектори в 2.1. следва, че максималният брой линейно независими вектори в редовете на матрицата B е три, т. е. $r_B = 3$.

106. Да се определи рангът на матрицата

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -2 & 10 & 5 \\ 3 & 7 & -9 & 14 & -3 \\ 12 & 8 & -7 & 13 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Отг.: $r_C = 4$.

*****

Минор $M_к$ от к-ти ред от една матрица е детерминантата, получена от общите елементи на произволно избрани к реда и к стълба на матрицата.

Обграждащ минор на минора $M_к$ е всеки минор от (к+1)-ви ред, който съдържа $M_к$.

Определение II. *Рангът на една матрица е числото, което показва най-високият ред на различен от нула минор от тази матрица.*

В сила е следната

Теорема. *Ако в матрицата А има минор от к-ти ред, различен от нула ($M_к \neq 0$) и всички обграждащи минори на $M_к$ от (к+1)-ви ред са равни на нула, рангът на матрицата А е равен на к.*

107. Намерете ранга на всяка от матриците

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{Vmatrix}; \qquad \text{б) } B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение: а) Разглеждаме минора от втори ред, образуван от общите елементи на първите два реда и първите два стълба на матрицата А:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Единственият обграждащ минор на M_2 е минорът

$$M_3 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

От това следва, че $r_A = 3$.

б) Минорът $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$ е различен от нула. Неговият обграждащ минор от трети ред

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 20$$

също е различен от нула. Двата обграждащи миньора на M_3 са равни на нула:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_4^* = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Това според последната теорема показва, че рангът на матрицата В е равен на 3.

108. Да се определи в зависимост от стойностите на параметъра a рангът на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 6-a & a+15 \\ 2 & 8 & 4 & a+9 \end{Vmatrix}.$$

Решение: Първият ред се умножава с -1, -3 и -2 и се прибавя съответно към втория, третия и четвъртия ред. Матрицата получава еквивалентния вид:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{Vmatrix}.$$

Оттук следва, че рангът на A е поне 2, защото $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ за всяка стойност на параметъра; $r_A = 3$, ако a = 0 или a = 1; $r_A = 4$ за всяка стойност на $a \neq 0$ и $a \neq 1$.

109. Да се намери в зависимост от стойностите на параметъра a рангът на матрицата

$$B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & a+1 & a+10 \\ 6 & 9 & a^2-10 \end{Vmatrix}.$$

Отг.: Рангът е поне 1 за всяко a; $r_B = 2$, ако a = 2 или $a = \pm 5$; $r_B = 3$, ако $a \neq \pm 5$ и $a \neq 2$.

2.7. Метод на Гаус – Жордан

Тук ще изложим още един начин за намиране обратната на дадена матрица. Той се нарича метод на Гаус – Жордан и се изразява в следното.

Образува се матрицата $A|E$, т. е. към матрицата A се записва единичната матрица от същия ред, от който е A. Тя се нарича *разширена матрица.* Матрицата A се преобразува чрез *елементарните преобразувания*, които изложихме в 2.6, докато на нейно място се получи единичната матрица. Ако същите елементарни преобразувания се приложат върху матрицата E, тя се преобразува в обратната на матрицата A.

$$\begin{array}{c} A \,|\, E \\ \downarrow \;\; \downarrow \\ E \,|\, A^{-1} \end{array}$$

Ще приложим казаното в следващата задача.

110. Да се намери обратната на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 9 & -15 \\ 8 & 19 & -29 \end{Vmatrix}.$$

Решение: Всички елементи на първия ред в разширената матрица $A|E$ умножаваме с $\frac{1}{2}$. Сред това така преобразувания първи ред умножаваме с -4 и -8 и го прибавяме съответно към втория и към третия ред. С това приключва *първата итерация:*

$$A|E = \left\Vert \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -15 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 19 & -29 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert .$$

Вторият ред остава без промяна, защото в него елементът $a_{22} = 1$. Този втори ред се умножава с -2 и -3 и се прибавя съответно към първия и към третия ред. С това приключва *втората итерация:*

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{9}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right\|.$$

Третият ред се умножава с $\frac{1}{4}$ и елементът a_{33} става 1. След това така преобразуваният трети ред се умножава с -3 и 3 и се прибавя съответно към първия и към втория ред. С това приключва последната *трета итерация:*

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{9}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\|$$

Обратната на матрицата A е равна на

$$A^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc} 3 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\|.$$

111. Да се намери с метода на Гаус – Жордан обратната на матрицата

$$\text{а) } A = \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{array}\right\|; \qquad \text{б) } B = \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & -4 & -5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -2 \end{array}\right\|.$$

Решение: а) $A|B = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -24 & 10 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -\frac{16}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -8 & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right\|.$$

\

Отг.: а) $A^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc} 13 & -\frac{16}{3} & -\frac{1}{3} \\ 6 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -8 & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right\|$; б) $B^{-1} = \left\|\begin{array}{cccc} 65 & -2 & 7 & -16 \\ -50 & 1 & -5 & 13 \\ 11 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$.

2.8. Матрични уравнения

Уравнението AX = B, където A и B са известни матрици, а X – неизвестна матрица, се нарича *матрично уравнение.* То има единственото решение

$$X = A^{-1}B,$$

ако A^{-1} съществува и размерите на матриците A и B са такива, че позволяват да се образува произведението $A^{-1}B$.

112. Да се реши матричното уравнение

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right\| . X = \left\|\begin{array}{c} 10 \\ 17 \\ 4 \end{array}\right\|.$$

Решение: Лесно се съобразява, че търсената матрица X е с размери (3,1).

Ако въведем матриците

$$A = \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right\|, \quad X = \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\|, \quad B = \left\|\begin{array}{c} 10 \\ 17 \\ 4 \end{array}\right\|,$$

даденото матрично уравнение се записва във вида

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right\| . \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 10 \\ 17 \\ 4 \end{array}\right\|.$$

Ако умножим двете матрици и произведението приравним на матрицата в дясната страна се получава системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\quad = 4 \end{array} \right. .$$

Така се стига до важния извод:

*Всяко матрично уравнение от вида AX = B може да се представи като система линейни уравнения и обратно: всяка система линейни уравнения може да се представи като матрично уравнение от вида AX = B (*вж. 2.9.).

Намирането на произведението $A^{-1}B$ може да се осъществи без да се търси отделно матрицата A^{-1}. Това се постига с метода на Гаус-Жордан по следния начин.

Образува се разширената матрица $A|B$. С елементарните преобразувания трансформираме матрицата A в единичната матрица E. Ако същите елементарни преобразувания проведем върху матрицата B, тя се трансформира в търсената матрица $X = A^{-1}B$.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \downarrow & \downarrow \\ E & A^{-1}B = X \end{array}$$

За нашия пример това е направено по-долу.

$$A|B = \left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & -4 & 17 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & -5 & 6 & -16 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right\|.$$

Така търсеното решение на матричното уравнение е матрицата

$$X = \left\|\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right\|.$$

113. Решете матричните уравнения

$$\left\|\begin{array}{rrr} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 11 & 3 \end{array}\right\|.Y = \left\|\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 7 \end{array}\right\|; \qquad \left\|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right\|.Z = \left\|\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 13 \end{array}\right\|.$$

Отг.: $Y = \left\|\begin{array}{r} 5 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right\|; \quad Z = \left\|\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\|.$

*****

Всяко матрично уравнение от вида

$$XA = B$$

има единственото решение $X = BA^{-1}$, ако A^{-1} съществува и размерите на дадените матрици A и B позволяват да се образува матрицата BA^{-1}.

114. Решете матричното уравнение

$$X.\left\|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{rrr} 11 & 11 & 6 \\ 23 & 26 & 15 \end{array}\right\|.$$

Решение: За да се избегне определянето на матрицата A^{-1} двете страни на уравнението $X=BA^{-1}$ се транспонират. Получава се

$$X' = (BA^{-1})' = (A^{-1})' B' = (A')^{-1} B'.$$

Тук е използвано свойството за транспониране на произведение на матрици (вж. задача 86 от 2.2.).

По-долу е намерена с метода на Гаус-Жордан матрицата $(A')^{-1}B'$.

$$A'|B' = \left\|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 4 & 11 & 23 \\ 2 & 0 & 3 & 11 & 26 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 15 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 4 & 11 & 23 \\ 0 & 2 & -5 & -11 & -20 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -8 \end{array}\right\| \sim$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right\|.$$

От матрицата

$$X' = (A')^{-1}B' = \left\|\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}\right\|,$$

с още едно транспониране се получава единственото решение на матричното уравнение:

$$X = (X')' = \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right\|.$$

115. Решете матричното уравнение

$$У \cdot \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc} 3 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 23 \\ 3 & 11 & 13 \end{array}\right\|.$$

Отг.: $У = \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right\|$; вж. зад. 114.

*****

Матричното уравнение от вида

$$AXB = C$$

има единственото решение $X = A^{-1}CB^{-1}$, ако A^{-1} и B^{-1} съществуват и размерите на дадените матрици A, B и C позволяват да се образува произведението $A^{-1}CB^{-1}$.

116. Решете матричното уравнение

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix} . X . \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 22 & 30 \\ 31 & 40 \end{Vmatrix} .$$

Решение: Обратните на матриците A и B са равни на

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix},$$

така, че

$$X = A^{-1}CB^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 22 & 30 \\ 31 & 40 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} .$$

117. Решете матричното уравнение

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} Z \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} .$$

Отг.: $Z = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

2.9. Системи линейни уравнения

Общият вид на система линейни уравнения, която има m уравнения и n неизвестни (m и n са естествени числа), е

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m , \end{array} \right.$$

където a_{ij} , $i=1\div m$, $j=1\div n$, са коефициенти, b_i са свободни членове, а x_j са неизвестните в системата.

По-кратко тази система може да се запише във вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i , \ i = 1 \div m .$$

Ако въведем матриците

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{Vmatrix},$$

се получава *матричният вид на системата* (вж. зад. 112)

$$AX = B.$$

Ако матрицата A представим чрез нейните вектор стълбове

$$A = \| A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_n \|,$$

системата добива *векторния вид*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B.$$

Матрицата A се нарича матрица на системата, а $A|B$ - *разширена матрица на системата.*

Решение на системата ще наричаме всеки n-мерен вектор $X=(x_1, x_2,..., x_n)$, чиито координати удовлетворяват всички уравнения на системата.

Да се реши една система означава да се намерят всичките й решения или да се установи, че тя няма решение.

Две системи са еквивалентни, ако всяко решение на първата е решение на втората и всяко решение на втората е решение на първата.

Ако една система линейни уравнения има поне едно решение, тя се нарича съвместима, а ако тя няма решение се нарича несъвместима (противоречива). Ако решението й е единствено, тя се нарича определена, а ако има безброй решения, се нарича неопределена.

Важна роля в теорията на системите линейни уравнения играе основната

Теорема на Кронекер-Капели. *Необходимото и достатъчно условие една система линейни уравнения да е съвместима, е рангът на матрицата A и рангът на матрицата $A|B$ да са равни.*

118. Решете системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + \quad 5x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 = 9. \end{array}\right.$$

Решение: Разширената матрица на системата

$$A|B = \left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & -2 & 10 & 4 & 9 \end{array}\right\|$$

има ранг 2, защото миньорът от втори ред

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -7$$

е различен от нула, а рангът на матрицата A е равен на 1, защото редовете й са пропорционални. От $1 = r_A \neq r_{A|B} = 2$ и теоремата на Кронекер-Капели, следва че системата няма решение, т. е. тя е несъвместима.

*****

За удобство и за икономия на място, ако това не поражда двусмислие, векторът който е решение на системата ще записваме като вектор ред, вместо като вектор стълб.

*****

За системи линейни уравнения, в които броят на уравненията и броят на неизвестните са равни, е в сила следната

Теорема на Крамер. *Необходимото и достатъчно условие системата*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

да има единствено решение е детерминантата ѝ $\Delta = \det A$ *да бъде различна от нула.*

Единственото решение е векторът

$$X = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

т. е.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = 1 \div n.$$

Детерминантите $\Delta_j,\ j = 1 \div n$, се получават от Δ чрез замяна на j-тия стълб със стълба на свободните членове на системата. Тези формули се наричат *формули на Крамер.*

119. Решете с формулите на Крамер системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20 \\ 3x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 = 14 \\ x_1 \qquad\quad\ - x_3 + x_4 = 4 \\ \qquad\quad x_2 + 4x_3 - x_4 = 14. \end{array}\right.$$

Решение: Детерминантата на системата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

е различна от нула, следователно тази система има единствено решение. Трябва да се изчислят детерминантите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 2 & 3 & -1 \\ 14 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 14 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 40, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 & -1 \\ 3 & 14 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 14 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 32,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 & -1 \\ 3 & 0 & 14 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 14 & -1 \end{vmatrix} = 24, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 3 & 0 & -1 & 14 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{vmatrix} = 16.$$

По формулите на Крамер намираме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4,\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3,\quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 2.$$

Единственото решение на системата е векторът X = (5,4,3,2).

120. Решете системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 15. \end{array}\right.$$

Отг.: $\Delta = -99,\ X = (1,2,3,4).$

*****

Ако една система има m уравнения и n неизвестни и $r_A = r_{A|B} =$ к, тя е съвместима и матриците A и $A|B$ имат общ минор от к-ти ред, който означаваме с $M_к$ и ще наричаме *базисен минор на системата.* Очевидно $к \leq \min\{m,n\}$.

Когато к < n, системата има безброй решения (тя е неопределена). Сега ще разгледаме подробно този случай.

Ако приемем, че минорът $M_к$ е в левия горен ъгъл на матрицата на системата, то първите к реда на матриците A и $A|B$ са линейно независими, тъй като $M_к \neq 0$, а останалите им редове са линейни комбинации от тях. Това означава, че първите к уравнения на системата са линейно независими, а останалите уравнения са линейни комбинации от тях. Така че е нужно да разгледаме еквалентния вид на системата, която съдържа само първите к уравнения на дадената система:

$$\left|\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}x_n = b_k .
\end{array}\right.$$

Неизвестните $x_1, x_2, \ldots, x_к$ се наричат базисни неизвестни, а $x_{к+1}, x_{к+2}, \ldots, x_n$ – свободни неизвестни.

Ако събираемите, съдържащи свободните неизвестни се прехвърлят в десните страни на уравненията се получава следната система, еквивалентна на дадената:

$$\left|\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 - a_{2,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n .
\end{array}\right.$$

Решенията на тази система се намират, като всички базисни неизвестни се изразят чрез свободните неизвестни. Това представяне се нарича *общо решение на системата.* От него чрез произволни стойности на свободните неизвестни могат да се получават *частни решения на системата.*

Частното решение, което се получава за нулеви стойности на свободните неизвестни се нарича **базисно решение на системата.**.

Базисните решения играят основна роля в *Математическото оптимиране.*

Съществен е фактът, че *броят на базисните решения на всяка система линейни уравнения е краен.* Този брой не надхвърля

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

където n е броят на неизвестните, а к е рангът на матриците A и $A|B$.

Броят на базисните решения ще бъде точно C_n^k, ако всички минори от к-ти ред в матрицата А са различни от нула.

121. Дадена е системата линейни уравнения

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 15 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 11x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 = 19. \end{vmatrix}$$

а) Намерете общото решение на системата при базисни неизвестни x_1, x_2, x_3. Определете базисното решение;

б) определете броя на всички базисни решения на тази система;

в) възможно ли е базисни неизвестни да бъдат x_3, x_4, x_5?

Решение: Разглеждаме разширената матрица

$$A|B = \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -4 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 8 & -11 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -12 & 19 \end{array} \right\| .$$

Минори от втори и трети ред различни от нула, които са в горния ляв ъгъл на тази матрица са

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Ограждащи минори на M_3 в матрицата А са два:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & -11 \\ 1 & 2 & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

От $M_3 \neq 0$ и $M_4 = M^*_4 = 0$ следва, че рангът на матрицата А е равен на 3. За да определим ранга на матрицата $A|B$, разглеждаме ограждащия минор

$$M_4^{**} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 19 \end{vmatrix} = 0.$$

От $M^{**}_4 = 0$ следва, че рангът и на разширената матрица $A|B$ е равен на 3. Тъй като $r_A = r_{A|B} = 3 < n = 5$, следва че системата има безброй решения и четвъртото уравнение е линейна комбинация на първите три, затова по-нататък разглеждаме само първите три уравнения на системата.

а) Базисен минор е M_3, който е различен от нула. Базисни неизвестни са x_1, x_2, x_3, а свободни неизвестни са x_4 и x_5. След като прехвърлим събираемите съдържащи свободните неизвестни, получаваме еквивалентния вид на системата:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15 - 2x_4 + 4x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 - 8x_4 + 11x_5. \end{array} \right.$$

По-долу тя е решена с метода на Гаус-Жордан.

$$A|B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 - 2x_4 + 3x_5 \\ 1 & 2 & 2 & 15 - 2x_4 + 4x_5 \\ 1 & 1 & 3 & 13 - 8x_4 + 11x_5 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 - 2x_4 + 3x_5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \quad + x_5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 - 6x_4 + 8x_5 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 - 2x_4 + 2x_5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \quad + x_5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 - 6x_4 + 8x_5 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 - 2x_4 + 2x_5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 + 3x_4 - 3x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 - 3x_4 + 4x_5 \end{array} \right\|.$$

Общото решение на системата е

$$x_1 = 3 - 2x_4 + 2x_5$$
$$x_2 = 4 + 3x_4 - 3x_5$$
$$x_3 = 2 - 3x_4 + 4x_5,$$

където x_4 и x_5 могат да бъдат произволни реални числа.

Частните решения са безброй много. Всяко от тях се получава чрез произволни стойности на свободните неизвестни x_4 и x_5. Ако приемем например $x_4 = 3$ и $x_5 = 4$, частното решение е векторът X = (5,1,9,3,4), а ако приемем $x_4 = 2$ и $x_5 = 6$, частното решение е векторът X=(11,-8,20,2,6). На всяка друга двойка числа на свободните неизвестни x_4 и x_5 отговаря съответно частно решение.

Базисното решение се получава за $x_4 = x_5 = 0$ и то е векторът X = (3,4,2,0,0).

б) Броят на базисните решения е не повече от

$$C_5^3 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 10.$$

От всички минори от трети ред в матрицата A само този, който е образуван от коефициентите пред x_3, x_4 и x_5 е равен на нула:

$$M_3^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Всички други минори от трети ред в матрицата A са различни от нула (проверете!), което показва, че броят на всички базисни решения на системата е 9.

в) Неизвестните x_3, x_4, x_5 не могат да бъдат базисни неизвестни, защото $M_3^* = 0$.

122. Решете системите, като намерите едно тяхно общо решение

а) $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 4 \\ \quad x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 3 \end{array} \right.$; в) $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 9x_5 = 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 18 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 10 \end{array} \right.$.

Упътване: а) За ранговете на двете матрици е в сила $r_A = r_{A|B} = 3$. При базисни неизвестни x_1, x_2, x_3, общото решение е

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2 - x_4$$
$$x_3 = 2 - x_4 .$$

б) няма решение, защото $r_A \neq r_{A|B}$.

в) Отг.: $x_1 = 5 - 3x_4 + 9x_5$
$x_2 = 6 + 2x_4 - 4x_5$
$x_3 = 7 - x_4 + 3x_5$.

123. Намерете всички базисни решения на системата

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 42. \end{vmatrix}$$

Решение: Всички възможни миньори от втори ред в матрицата A са 6. Тези от тях, които са различни от нула са 3. Те са

$$M_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = 1, \quad M_2^* = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{Vmatrix} = 3, \quad M_2^{**} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} = 2.$$

Това показва, че базисните решения са 3 при базисни неизвестни x_1, x_4; x_2, x_4; x_3, x_4. Общото решение във всеки от тези случаи е съответно

$$x_1 = 12 - 3x_2 - 2x_3 \qquad x_2 = 4 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \qquad x_3 = 6 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2$$

$$x_4 = 6, \qquad x_4 = 6, \qquad x_4 = 6.$$

Базисните решения са

$$X_1 = (12,0,0,6), \qquad X_2 = (0,4,0,6) \qquad X_3 = (0,0,6,6).$$

124. Определете всички стойности на параметъра a, за които системата

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x_1 + ax_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = a \\ 5x_1 + 2x_2 = 7 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} ax_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{vmatrix}$$

има само едно решение. Намерете това решение.

Решение: а) Разширената матрица на системата е

$$A|B = \left\Vert \begin{array}{cc|c} 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & a \\ 5 & 2 & 7 \end{array} \right\Vert.$$

Минорът от втори ред $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$ е различен от нула за всяка стойност на параметъра, т. е. $r_A = 2$. Системата ще има само едно решение, ако $r_A = r_{A|B} = 2$. Следователно единственият минор от трети ред M_3 трябва да бъде равен на нула:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & a \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 5a^2 - 16a + 3 = 0.$$

Търсените стойности на параметъра са $a = 3$ и $a = \frac{1}{5}$. Когато $a = 3$, решението е $X = (1,1)$, а когато $a = \frac{1}{5}$, решението е $X = (\frac{33}{5}, -13)$.

б) Отг.: Ако а = 1, X = (2,1,3); ако а = $-\frac{17}{2}$, X = $\frac{1}{42}$(8,137,183).

*****

Ако всички свободни членове (десни страни) на уравненията са равни на нула, системата се нарича хомогенна (еднородна).

Общият вид на хомогенна система, която има m уравнения и n неизвестни, е

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{array}\right.$$

Матричният вид на тази система е

$$AX = O,$$

векторният й вид е

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = O,$$

а по-кратко тя може да се запише във вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1 \div \text{m}.$$

Рангът на разширената матрица $A|B$ съвпада винаги с ранга на матрицата А, защото двете матрици се различават с нулев стълб и по *теоремата на Кронекер-Капели* всяка хомогенна система е съвместима – нулевото решение удовлетворява всяка хомогенна система.

Основният въпрос е при какво условие една хомогенна система има ненулево решение. Това условие се състои в следната

Теорема. *Необходимото и достатъчно условие една хомогенна система линейни уравнения да има ненулево решение е рангът на матрицата А да бъде по-малък от броя на неизвестните.*

От тази теорема и теоремата на Кронекер-Капели могат да се изведат две важни следствия:

1. *Ако броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните, хомогенната система има ненулево решение.*
2. *Всяка хомогенна система, която има равен брой уравнения и неизвестни има ненулево решение, ако детерминантата й е равна на нула и обратно - ако една хомогенна система с равен брой уравнения и неизвестни има ненулево решение, то детерминантата й е равна на нула.*

125. Намерете общото решение на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 8x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 17x_3 - 7x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 25x_3 - 8x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Решение: Рангът на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -8 & -1 \\ 4 & 1 & -17 & -7 \\ 5 & 2 & -25 & -8 \end{Vmatrix}$$

е равен на 2, защото $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, а двата ограждащи миньора на M_2 са равни на нула (проверете!). От $r_A = 2 < n = 4$ следва, че системата има ненулево решение. Третото уравнение е линейна комбинация на първите две, затова по-нататък разглеждаме еквивалентната на дадената система, която включва само първите две уравнения. С метода на Гаус-Жордан получаваме последователно

$$\left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8x_3 + x_4 \\ 4 & 1 & 17x_3 + 7x_4 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8x_3 + x_4 \\ 0 & -3 & -15x_3 + 3x_4 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3x_3 + 2x_4 \\ 0 & 1 & 5x_3 - x_4 \end{array}\right\Vert .$$

Общото решение е

$$x_1 = 3x_3 + 2x_4$$
$$x_2 = 5x_3 - x_4.$$

Чрез произволни стойности на свободните неизвестни x_3 и x_4 могат да се получат безброй много частни решения. Ето три от тях:

$$X_1 = (12,7,2,3), \quad X_2 = (7,3,1,2), \quad X_3 = (3,5,1,0).$$

126. Решете системата

$$\text{а)} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 20x_4 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 30x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{б)} \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Отг.: а) $x_1 = 2x_3 - x_4$, $x_2 = -x_3 + 3x_4$; б) $\Delta = 0$; $X = (0, 0, 0, 0)$.

127. За кои стойности на параметъра a системата

$$\text{а)} \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{array} \right. ; \qquad \text{б)} \left| \begin{array}{l} x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ ax_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 - 19x_2 + 12x_3 = 0 \end{array} \right.$$

има ненулеви решения?

Решение: а) Системата ще има ненулеви решения, ако детерминантата ѝ е равна на нула:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & -5 & 2 \\ a & -3 & 5 \end{vmatrix} = 5a^2 - 2a - 39 = 0. \quad a = -\frac{13}{5} \text{ и } a = 3.$$

б) Отг.: $a = -\dfrac{19}{4}$ и $a = 2$.

2.10. Системи линейни неравенства

Общият вид на система линейни неравенства, която има m неравенства и n неизвестни (m и n са естествени числа) е:

$$(1)\qquad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{array} \right.$$

където a_{ij} и b_i, са известни числа, а x_j са неизвестни, $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$.

Чрез матриците

$$A = \left\| \begin{array}{l} a_{11} \quad a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \quad a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \ldots a_{mn} \end{array} \right\|, \quad X = \left\| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{array} \right\|,$$

(1) получава матричния вид

$$AX \le B.$$

Векторният вид на (1) е

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le B,$$

а по-кратко системата неравенства (1) може да се запише във вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1 \div m.$$

Да се реши една система линейни неравенства означава да се намерят всичките ѝ решения или да се установи, че тя няма решение.

От (1) се получава съответната система линейни уравнения:

$$(2)\qquad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\quad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \quad = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\quad + x_{n+m} = b_m \end{array} \right.$$

чрез въвеждане на m неотрицателни *допълнителни неизвестни* $x_{n+i} \ge 0$, $i = 1 \div m$, които се изваждат или прибавят към левите страни на всяко неравенство в зависимост от вида на неравенствата: “ ≥ “ или “ ≤ “.

В сила е следната

Теорема. *На всяко решение* $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ *на системата уравнения (2) отговаря решението* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на системата неравенства (1) и обратно, от всяко решение на (1) може да се получи съответно решение на (2), като всички въведени допълнителни неизвестни са неотрицателни числа.*

128. Дадена е системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 3. \end{array} \right.$$

а) Съставете съответната система уравнения;

б) намерете общото решение на системата уравнения при базисни неизвестни x_1, x_2,x_3;

в) от три частни решения на системата уравнения намерете съответните решения на системата неравенства.

Решение: а) Съответната система уравнения е

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 \qquad = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 \qquad + x_6 \ = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad - x_7 = 3. \end{array}\right.$$

Допълнителните неизвестни x_5, x_6 и x_7 могат да приемат само неотрицателни стойности.

б) Общото решение на системата уравнения е

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \qquad\qquad x_5 + x_6 + x_7 \\ x_2 = 13 - 10x_4 - 6x_5 - 7x_6 - 4x_7 \\ x_3 = 10 - 9x_4 - 4x_5 - 5x_6 - 3x_7 \end{array}\right. .$$

в) $\overline{X}_1 = (3,6,7,-1,1,1,1)$ $\qquad X_1 = (3,6,7,-1)$

$\overline{X}_2 = (0,3,1,1,0,0,0)$ $\qquad X_2 = (0,3,1,1)$

$\overline{X}_3 = (5,16,18,-3,2,1,2)$ $\qquad X_3 = (5,16,18,-3).$

129. Намерете три решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8. \end{array}\right.$$

Решение: Ако към лявата страна на неравенството, което е от вида " $\le$ " се прибави x_4, а от лявата страна на неравенството, което е от вида " $\ge$ " се извади x_5 (тези допълнителни неизвестни могат да имат само неотрицателни стойности), общото решение на получената система уравнения, при базисни неизвестни x_1, x_2, x_3, е

$$x_1 = 4 + \frac{1}{2}x_4 - x_5$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5.$$

Чрез три двойки неотрицателни числа, например $x_4=x_5=0$; $x_4=2$, $x_5=1$; $x_4=4$, $x_5=3$, се получават три съответни решения на дадената система:

$X_1 = (4,1,2)$, $X_2 = (4,0,5)$, $X_3 = (3,-1,10)$.

2.11. Графичен начин за решаване на системи линейни неравенства в двумерния случай (n = 2)

Неравенството

$$ax_1 + bx_2 \leq c$$

спрямо координатната система x_1Ox_2 дефинира една полуравнина. Това неравенство се удовлетворява от всички точки от полуравнината, ограничена от правата

$$p : ax_1 + bx_2 = c$$

и от точките на правата p, вж. 1.2.

Правата p се нарича гранична права на полуравнината.

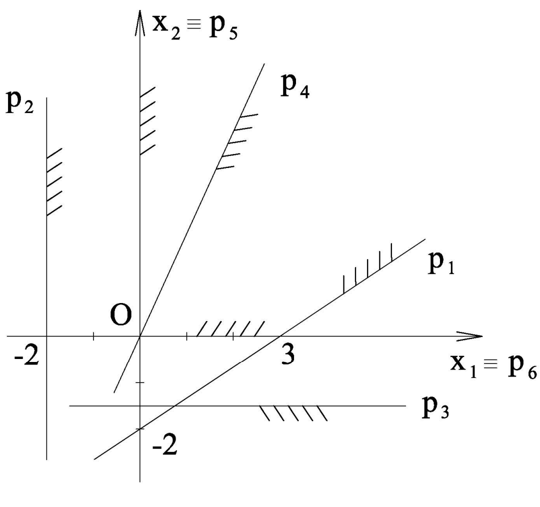
.

130. Решете по графичен начин наравенствата

а) $2x_1 - 3x_2 \leq 6$; б) $5x_1 \geq -10$; в) $-2x_2 \geq 3$;

г) $2x_1 - x_2 \geq 0$; д) $x_1 \geq 0$; е) $x_2 \geq 0$.

Решение: а) Граничната права има уравнение p_1: $2x_1$-$3x_2$ = 6, фиг. 11. Полуравнината, която отговаря на неравенството се установява чрез проверка с координатите на произволна точка, нележаща на правата p_1. Удобно е да направим проверката с координатите на началото на координатната система O(0,0): от вярното неравенство $0 < 6$ заключаваме, че областта на решенията на неравенството са всички точки от полуравнината, ограничена от правата p_1, която съдържа началото на координатната система, както и точките от правата p_1.



фиг. 11

Отг.: Областта на решение на неравенството е:

б) полуравнината, ограничена от правата $p_2 : x_1 = -2$, съдържаща O(0,0) и точките от правата p_2;

в) полуравнината, ограничена от правата $p_3 : x_2 = -\dfrac{3}{2}$; тя съдържа точките от правата p_3 и не съдържа точката O(0,0).

г) полуравнината, ограничена от правата $p_4 : 2x_1 - x_2 = 0$, съдържаща точката (1,0) и точките от правата p_4;

д) първи и четвърти квадрант и точките от ординатната ос Ox_2;

е) първи и втори квадрант и точките от абсцисната ос Ox_1.

Системата линейни неравенства, в която участват само две неизвестни, има вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}.$$

Област на решение G(X) на системата неравенства е сечението (общата част) на всички полуравнини, отговарящи на всички неравенства.

Областта G(X) е изпъкнал многоъгълник. Областта G(x) е празно множество, когато системата неравенства няма решение.

Върховете на областта G(X) отговарят на базисните решения на системата неравенства.

131. Дадена е системата неравенства

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

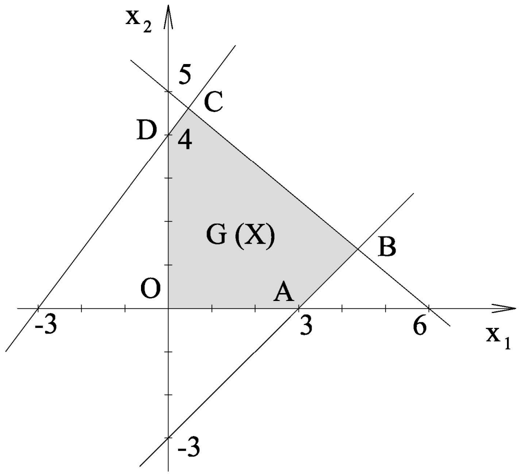
а) Намерете областта на решение на системата;

б) определете всички базисни решения.

Решение: а) След построяването на всички полуравнини, отговарящи на неравенствата, областта на решение е G(X), фиг. 12.

б) Базисните решения отговарят на върховете O, A, B, C и D на областта G(X). Имаме O(0,0), A(3,0), D(0,4). Координатите на върха B се определят от системата уравнения

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 30 \\ x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$



фиг. 12

Решението е $B(\frac{48}{11}, \frac{15}{11})$. Координатите на върха C се определят от системата уравнения

$$\begin{vmatrix} 4x_1 - 3x_2 = -12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{vmatrix}$$

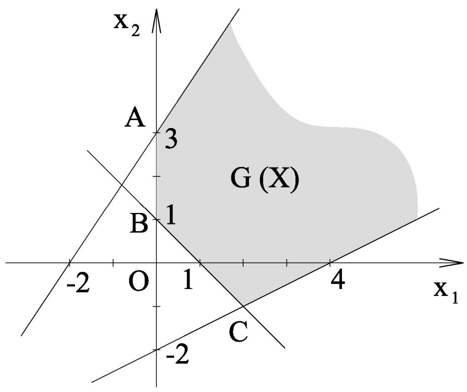
Тук решението е $C(\frac{6}{13}, \frac{60}{13})$.

132. Да се реши по геометричен начин системата неравенства

$$\begin{vmatrix} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{vmatrix}$$

и се определят всички базисни решения.

Отг.: Областта на решение е неограничената област G(X) с върхове A, B и C, фиг. 13. Базисните решения са A(0,3), B(0,1), C(2,-1).



фиг. 13

133. Решете по геометричен начин системата неравенства

а) $\begin{vmatrix} 2x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3x_1 + 7x_2 \ge 23 \\ -x_1 + 5x_2 \le 7 \\ 3x_1 - x_2 \ge 7 \\ x_2 \ge 0; \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 3x_1 + 7x_2 \ge 23 \\ x_1 - 5x_2 \ge -7 \\ 3x_1 - x_2 \ge 7 \\ x_1 \le 3. \end{vmatrix}$

Отг. а) Системата няма решение; първото и третото неравенства са противоречиви;

б) решение е неограничената област G(X) в първи квадрант между правите $x_1 - 5x_2 + 7 = 0$, $x_2 = 0$ и отсечката с краища точките (3, 2) и $(\frac{23}{3}, 0)$;

в) решение е само точката (3,2).

Тест за самоподготовка

1. Обратната на матрицата $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 17 \\ -1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ е равна на:

а) $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -6 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} \frac{41}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & -4 & \frac{3}{2} \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{Vmatrix}$.

2. Рангът на матрицата

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & -1 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

е равен на :
а) 5; б) 4; в) 3; г) 2.

3. Общото решение на системата линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 &= 29 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 - 25x_5 &= 3 \end{aligned} \right.$$

при базисни неизвестни x_1, x_2, x_3 е:

а)	б)	в)	г)
$x_1=6-2x_4+4x_5$	$x_1=7+x_4-2x_5$	$x_1=1+x_4+3x_5$	$x_1=2+2x_4+3x_5$
$x_2=4+3x_4-9x_5$	$x_2=6-x_4+x_5$	$x_2=3-x_4+4x_5$	$x_2=4-x_4+12x_5$
$x_3=5-x_4+3x_5$;	$x_3=4-2x_4+x_5$;	$x_3=6+x_4-2x_5$;	$x_3=7+x_4-2x_5$.

4. За кои стойности на параметъра k, системата линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} kx_1 + 3x_2 &= 18 \\ 3x_1 - x_2 &= 2k+1 \\ 2x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned} \right.$$

има само едно решение?

а) 3 и 4; б) 1 и 5; в) $-\frac{3}{2}$ и 2; г) -1 и $\frac{4}{3}$.

5. Единственото решение на системата линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15 \end{aligned} \right.$$

е векторът:
а) (3, 2, 1, 4); б) (1, 2, 3, 4); в) (4, 3, 7, 1); г) (2, 0, -1, 3).