ПРЕДГОВОР

Учебникът *Висша математика* е предназначен главно за студенти, които са предпочели дистанционната форма на обучение, но той може да се ползва с успех както от задочници, така и от редовни студенти. Целта е бъдещите специалисти да получат знания и умения, които могат да използват в своята практика.

Учебникът съдържа четири раздела: *Аналитична геометрия в равнината, Линейна алгебра, Математичесто оптимиране и Диференциално смятане.* В тях, особено в раздела Математическо оптимиране са включени математическите понятия и алгоритми, които могат да се използват за решаване на оптимални задачи, възникнали в практическата дейност на специалистите.

Курсът Висша математика отговаря на специфичните изисквания на дистационната форма на обучение, които са породени от факта, че студентите работят първоначално самостоятелно с учебника и след това имат директен контакт с преподавателя. Поради това авторът се е стремил да представи учебния материал така, че той да бъде в максимална степен подходящ и за самоподготовка.

В началото на всеки раздел са изложени нужните определения и теоретични постановки, което доближава учебника до методично ръководство за решаване на задачи.

Включени са 38 фигури, което улеснява възприемането на материала.

В съответствие с изискванията на съвременната дистанционна форма на обучение всеки раздел започва с уточнени цели, т.е. това, което студентът би трябвало да знае и може, ако е усвоил съдържащия се в него учебен материал. Спецификата на дисциплината изисква решаването на множество задачи. Тъй като студентите работят самостоятелно, практическата част е подсилена в сравнение с традиционните учебници по математика. Включени са шест теста със задачи за самоподготовка, подобни на разгледаните в изложението, които трябва да бъдат решени самостоятелно преди провеждането на консултациите. Тестовете обхващат целия материал в учебника.

В началото на всеки раздел са записани основните ключови термини и понятия, използвани в изложението.

Съветваме читателя преди да премине към задачите за самоподготовка подробно да се запознае с теоретичните постановки в съответния раздел и внимателно да проучи решенията на задачите в него.

ПЪРВИ РАЗДЕЛ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Ключови понятия към глава 1.1.

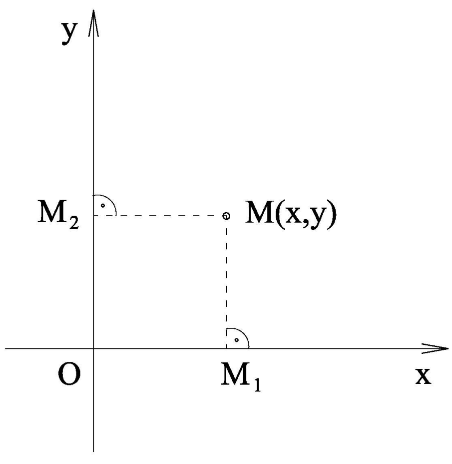
Координатна ос
Координатна система
Координати на точка – абсциса и ордината
Разстояние между две точки
Деление на отсечка в дадено отношение
Медиана, медицентър

1.1. Правоъгълна координатна система. Разстояние между две точки. Деление на отсечка в дадено отношение

След усвояване на материала в тази глава ще знаете:

- **какво е координатна ос и координатна система;**
- **как се определятят координатите на точка;**
- **как се намира разстоянието между две дадени точки**;
- **как се определят координатите на точка, която дели в дадено отношение една отсечка.**

Правоъгълната координатна система в равнината се определя от две взаимно перпендикулярни оси. Хоризонталната се бележи с Ox и се нарича *абсцисна ос*, а вертикалната се бележи с Oy и се нарича *ординатна ос.*



фиг. 1

Координатното начало – точката O е пресечната им точка. Положителната част на абсцисната ос е в дясно от координатното начало, а отрицателната й част е в ляво от него. Положителната част на ординатната ос е над координатното начало, а отрицателната й част е под него.

Координатните оси разделят равнината на *четири квадранта*. Те са разположени в посока обратна на часовниковата стрелка, като се започне от квадранта, определен от положителните части на Ox и Oy.

През точка M от равнината прекарваме успоредни прави на координатните оси. Нека M_1 и M_2 са съответно пресечните им точки с Ox и Oy. M_1 и M_2 се наричат *ортогонални проекции на точката M върху координатните оси*, фиг. 1.

На всяка точка M се съпоставят *наредената двойка числа* x и y, *които се наричат координати на тази точка. Абсцисата* е алгебричната мярка на отсечката OM_1, т. е.

$$x = \overline{OM_1},$$

а *ординатата* е алгебричната мярка на отсечката OM_2, т. е.

$$y = \overline{OM_2}\ .$$

Използва се означението M(x,y).

Обратно, на всяка наредена двойка числа (x,y) отговаря точно една точка от равнината.

Всички точки от абсцисната ос имат ордината равна на нула, а всички точки от ординатната ос имат абсциса равна на нула. Координатното начало има нулеви координати, т. е. O(0,0).

1. На правоъгълна координатна система постройте точките A(3,2), B(-6,5), C(4,-3), Д(-3,-5), E(-5,0), F(0,-2), $G(\frac{3}{4},-\frac{7}{3})$.

2. Намерете координатите на проекциите на точките A(-5,3), B(6,2), C(-2,1), Д(3,b) върху абсцисната ос.

Отг.: $A_1(-5,0)$, $B_1(6,0)$, $C_1(-2,0)$, $Д_1(3,0)$.

3. Намерете координатите на проекциите на точките A(-3,4), B(2,-3) ,C(4,5), Д(3,-1), E(-4,0), F(0,-6), G(a,-2) върху ординатната ос.

Отг.: $A_2(0,4)$, $B_2(0,-3)$, $C_2(0,5)$, $Д_2(0,-1)$, $E_2(0,0)$, $F_2(0,-6)\equiv F$, $G_2(0,-2)$.

4. Намерете симетричните точки спрямо абсцисната ос на точките A(4,3), B(-3,5), C(-2,-2), Д(5,-1), E(-1,0), $M(\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$.

Отг.: $A_1(4,-3)$, $B_1(-3,-5)$, $C_1(-2,2)$, $Д_1(5,1)$, $E_1(-1,0)\equiv E$, $M_1(\frac{1}{2},\frac{9}{4})$.

5. Намерете симетричните точки спрямо ординатната ос на точките A(-4,6), B(2,7), C(-3,-5), Д(3,-4), E(0,b), $M(-\frac{4}{5},\frac{8}{7})$.

Отг.: $A_1(4,6)$, $B_1(-2,7)$, $C_1(3,-5)$, $Д_1(-3,-4)$, $E_1(0,b)\equiv E$, $M_1(\frac{4}{5},\frac{8}{7})$.

*****

Ако са дадени точките M_1 и M_2 с координатите си: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, разстоянието между тях се определя с формулата

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

В частност разстоянието от точка M(x,y) до началото на координатната система O(0,0) е равно на

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

6. Да се определи разстоянието между точките: а) A(5,4) и B(7,3); б) C(0,-5) и Д(12,0); в) M(-7,-7) и N(-3,-2); г) P(4,-3) и O(0,0).

Отг.: а) $\sqrt{5}$; б) 13; в) $\sqrt{41}$; г) 5.

7. Обосновете, че триъгълникът с върхове A(3,3), B(-4,2), C(0,-1) е равнобедрен и правоъгълен. Намерете периметъра му.

Отг.: $|AC| = |BC|, AC^2 + BC^2 = AB^2, P = 5(2+\sqrt{2})$.

8. Да се намери върху ординатната ос точка М, разстоянието от която до точка А(-8,13) е равно на 17.

Решение: Изразяваме разстоянието от точка М(0,у) до точката А(-8,13):

$$\sqrt{64+(y-13)^2} = 17.$$

След повдигане двете части на това уравнение в квадрат, получаваме квадратното уравнение $y^2-26y-56=0$. Корените му са $y_1=-2$ и $y_2=28$, така че точките с исканото свойство са две: $M_1(0,-2)$ и $M_2(0,28)$.

9. Да се намери точка М, която се намира на разстояние 10 единици както от абсцисната ос, така и от точката В(-5,2).

Решение: Изразяваме разстоянието между двете точки М(х,10) и В(-5,2):

$$\sqrt{(x+5)^2+(10-2)^2} = 10.$$

От квадратното уравнение $x^2+10x-11=0$, което има корени $x_1=-11$ и $x_2=1$, намираме $M_1(-11,10)$ и $M_2(1,10)$.

10. Да се намери точка М, която се намира на разстояние 13 единици както от ординатната ос, така и от точката Р(8,5).

Отг.: $P_1(13,-7)$ и $P_2(13,17)$.

*****

Нека са дадени точките M_1 и M_2 със своите координати: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Дадено е и числото λ, което се определя от отношението

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}},$$

т. е. числото λ показва отношението, в което точката М(х,у) дели отсечката M_1M_2 и М е вътрешна точка за тази отсечка. Координатите х и у на делящата точка М се определят по формулите

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \lambda > 0.$$

В частност, когато делящата точка М(х,у) е среда на отсечката M_1M_2 ($\overline{M_1M} = \overline{MM_2}$), т. е. $\lambda = 1$, то координатите на средата на отсечката са:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

11. Ако са дадени точките А(3,-7) и В(-4,2), да се намерят координатите на точка М, която лежи на отсечката АВ и е 5 пъти по-близо до А, в сравнение с В.

Решение: В случая $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{1}{5}$. От

$$x = \frac{3+\frac{1}{5}(-4)}{1+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{15-4}{5}}{\frac{5+1}{5}} = \frac{11}{6};\ y = \frac{-7+\frac{1}{5}.2}{1+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{-35+2}{5}}{\frac{5+1}{5}} = -\frac{33}{6} = -\frac{11}{2},$$

намираме $M(\frac{11}{6}, -\frac{11}{2})$.

12. Ако точките A(-2,5), B(7,-1), C(4,9) са върхове на триъгълник, да се намерят координатите на средите на страните му.

Решение: Координатите на средата A_1 на страната BC са $x=\frac{4+7}{2}=\frac{11}{2}$, $y=\frac{-1+9}{2}=4$. По аналогичен начин за средите B_1 и C_1 съответно на страните AC и AB намираме $B_1(1,7)$ и $C_1(\frac{5}{2},2)$.

13. Дадени са точките A(2,-7) и B(4,5). Да се намерят точките M и N, които се намират върху правата, определена от A и B, така че отсечката MN се разделя от A и B на три равни части.

Решение: A е среда на отсечката MB, затова абсцисата x_M и ординатата y_M на точката M се определят чрез

$$2=\frac{x_M+4}{2},\ -7=\frac{y_M+5}{2},$$

откъдето $x_M=0$, $y_M=-19$. Координатите на точката N се определят по аналогичен начин.

Отг.: M(0,-19), N(6,17).

14. Да се определят координатите на върховете на триъгълника ABC, ако средите на страните му BC, AC, AB са съответно точките $A_1(5,2)$, $B_1(-1,5)$, $C_1(1,-1)$.

Решение: Ако върхове на триъгълника са точките $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, за трите абсциси се получава линейната система:

$$\left|\begin{aligned} x_1+x_2&=2\\ x_2+x_3&=10\\ x_3+x_1&=-2\end{aligned}\right.$$

Ако от първото уравнение определим $x_1=2-x_2$ и заместим с него в третото уравнение се получава $-x_2+x_3=-4$. Ако в него заместим стойността $x_2=10-x_3$ от второто уравнение, получаваме $x_3=3$. Тогава последователно получаваме $x_2=7$ и $x_1=-5$. По аналогичен начин намираме стойностите на ординатите.

Отг.: A(-5,2), B(7,-4), C(3,8).

15. Трите последователни върха на успоредник са A(1,2), B(7,-4), C(5,8). Намерете четвъртия връх D на този успоредник.

Решение: Диагоналите на всеки успоредник се разполовяват взаимно, затова пресечната им точка е P(3,5). Тогава $3=\frac{x_D+7}{2}$, $5=\frac{y_D-4}{2}$.

Отг.: D(-1,14).

16. A(-2,-3), B(8,-5), C(4,11) са върховете на триъгълник. Да се определят дължините на медианите на този триъгълник (медианата свързва връх на триъгълника със средата на срещулежащата му страна).

Отг.: 10, $\sqrt{130}, \sqrt{226}$.

17. A(3,-5), B(3,-3), C(-1,-2) са върхове на триъгълник. Да се определи дължината на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A.

Решение: Всяка ъглополовяща в триъгълника дели срещулежащата страна на части, пропорционални на дължините на съответните съседни страни. Дължините на страните AB и AC са $|AB| = 2, |AC| = 5.$ Ако L(x,y) е точката в която ъглополовящата през върха A пресича страната BC, то

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{5} = \lambda,$$

така че координатите на точката L се определят чрез

$$x = \frac{3 + \frac{2}{5}(-1)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{13}{7}, \quad y = \frac{-3 + \frac{2}{5}(-2)}{1 + \frac{2}{5}} = -\frac{19}{7}.$$

Дължината на ъглополовящата е равна на $|AL| = \sqrt{(\frac{13}{7} - 3)^2 + (-\frac{19}{7} + 5)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{7}$.

18. A(-4,1), B(7,-2), C(4,14) са върхове на триъгълник. Намерете координатите на *медицентъра* (пресечната точка на медианите) на този триъгълник.

Решение: Първи начин. Медицентърът M във всеки триъгълник дели всяка медиана в отношение 2:1, считано от съответния връх. Средата на страната BC е точката $A_1(\frac{11}{2}, 6)$. Тъй като $\frac{|AM|}{|MA_1|} = \frac{2}{1} = \lambda,$ то координатите на медицентъра са

$$x = \frac{-4 + 2.\frac{11}{2}}{1+2} = \frac{7}{3}, \quad y = \frac{1 + 2.6}{1+2} = \frac{13}{3}.$$

Втори начин. Медицентърът е център на тежестта на триъгълника, затова ако върховете на триъгълника са (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), то медицентърът има координати $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. В нашия случай

$$x = \frac{-4 + 7 + 4}{3} = \frac{7}{3}, \quad y = \frac{1 - 2 + 14}{3} = \frac{13}{3}.$$

19. Права минава през точките A(2,5) и B(7,9). Намерете ординатата на точка M от тази права, ако абсцисата й е равна на 4.

Решение: От абсцисите на точките A, M и B се разбира, че M е между A и B. Ортогоналните проекции на отсечките AM и MB върху Ox са съответно 2 и 3. Ако b е търсената ордината на точката M, ортогоналните проекции на отсечките AM и MB върху Oy са съответно b-5 и 9-b. Тогава

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{2}{3} = \frac{b-5}{9-b},$$

откъдето $b = \frac{33}{5}$.

Тест за самоподготовка

1. Разстоянието между точките A(-4,2) и B(8,-3) е равно на:

а) $7\sqrt{8}$; б)13; в) 14; г) $3\sqrt{17}$; д) 15.

2. Да се намерят координатите на точка, която се намира на разстояние 10 единици както от ординатната ос, така и от точката A(2,7).

а) (10,6) и (10,-3); б) (8,-7) и (8,-14); в) (10,1) и (10,13); г) (5,10) и (6,10).

3. Точката M лежи на отсечката с краища A(-1,6) и B(7,2) и е три пъти по-близо до A в сравнение с B. Координатите на точката M са:

а) (1,5); б) $(\frac{7}{2},-1)$; в) $(4,-\frac{3}{2})$; г) (2,6); д) $(\frac{-3}{2},3)$.

4. В триъгълник с върхове A(13,15), B(8,12), C(14,17), най-късата страна има дължина:

а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{5}$; д) $\sqrt{6}$.

5. Координатите на медицентъра в триъгълника с върхове A(-5,2), B(9,-1), C(3,14) са:

а) (2,3); б) (-1,4); в) 2,-1); г) $(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$; д) $(\frac{7}{3},5)$.

Ключови понятия към глава 1.2.

Уравнение на права линия

Полуравнина

Декартово уравнение на права

Ъглов коефициент на права

Права през дадена точка и с даден ъглов коефициент

Права през две дадени точки

Пресечна точка на две прави

Ъгъл между две прави

Ъглополовяща на ъгъл между две прави

1.2. Уравнение на права. Ъгъл между две прави. Условия за успоредност и перпендикулярност на две прави

След усвояване на материала в тази глава ще знаете:

- **различните представяния на права линия;**
- **как се определя пресечната точка на две прави;**
- **как се определя полуравнина, ограничена от права;**
- **какво е ъглов коефициент и отрез на права линия;**
- **как се определя ъгълът между две пресичащи се прави;**
- **кога две прави са успоредни и кога са перпендикулярни.**

Когато в правоъгълна координатна система xOy е дадена права линия p, съществува уравнение от първа степен с две неизвестни

(1) $$ax + by + c = 0,$$

което се обръща в тъждество, ако вместо текущите координати x и y се поставят координатите на коя да е точка от правата p.

Обратно, ако е дадено уравнението (1), съществува само една права, координатите на всички точки на която удовлетворяват това уравнение.

Уравнението (1) се нарича *общо уравнение на права.*

Всяка права разделя равнината на две *полуравнини*. Координатите на всички точки, които удовлетворяват неравенството

$$ax + by + c < 0$$

се намират изцяло в *едната полуравнина* по отношение на правата (1). Координатите на всички точки, които удовлетворяват наравенството

$$ax + by + c > 0,$$

се намират изцяло в <u>*другата полуравнина*</u> по отношение на правата (1).

20. Дадена е правата p: 2x-7y+22=0. Установете лежат ли на тази права точките M(3,4), N(1,-4), G(-2,5).

Решение: Точката M(3,4) лежи на правата p, защото координатите ѝ удовлетворяват даденото уравнение:

$$2.3 - 7.4 + 22 = 0.$$

Точките N и G не лежат на правата p, защото координатите им не удовлетворяват уравнението ѝ. Точката N лежи в едната полуравнина относно p и удовлетворява неравенството

$$2.1 - 7.(-4) + 22 > 0,$$

а точката G лежи в другата полуравнина относно p и удовлетворява неравенството

$$2.(-2) - 7.5 + 22 < 0.$$

21. Проверете кои от точките $M_1(1,1)$, $M_2(2,1)$, $M_3(7,-2)$, $M_4(-3,4)$; $M_5(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ лежат на правата g: x+2y-3=0 и кои не лежат на нея.

Отг.: Точките M_1, M_3 и M_5 лежат на g. Точките M_2 и M_4 не лежат на g и се намират в една и съща полуравнина относно g, защото удовлетворяват неравенството x+2y-3>0.

22. Точките A_1, A_2, A_3 лежат на правата 4x-3y-9=0 и техните абсциси са съответно 2; 0; 5. Определете ординатите на тези точки.

Отг.: $-\frac{1}{3}$; -3; $\frac{11}{3}$.

23. Точките B_1, B_2, B_3 лежат на правата 5x-7y+14=0 и техните ординати са съответно -1; 2; -3. Определете абсцисите на тези точки.

Отг.: $-\frac{21}{5}$; 0; -7.

24. Определете всички стойности на параметъра a, за които точката M(2a,a+1) лежи на правата q: 3x-(2a-3)y+a+7=0.

Решение: Координатите на M удовлетворяват уравнението на правата q, затова е в сила зависимостта

$$3.2a-(2a-3)(a+1)+a+7=0$$

или

$$a^2 - 4a - 5 = 0.$$

Корените a = -1 и a = 5 на това квадратно уравнение са търсените стойности на параметъра a.

25. Определете всички стойности на параметъра к, за които точката P(к-1,к) лежи на правата

а) 2(к+1)x-3y+2=0;

б) 4x+кy+8=0;

в) (к-1)x+2кy+1=0.

Отг.: а) 0 и $\frac{3}{2}$; б) -2; в) няма реална стойност за к.

26. Установете взаимното положение на правите:

а) 3x-2y-19=0 и 4x+3y-14=0;

б) 2x-5y+1=0 и 6x-15y-2=0;

в) 4x+3y-1=0 и 8x+6y-2=0.

Решение: а) Ако правите се пресичат, координатите на общата им точка ще удовлетворяват уравненията на двете прави, затова трябва да се намери решението на системата

$$\begin{vmatrix} 3x-2y-19=0 \\ 4x+3y-14=0. \end{vmatrix}$$

Първи начин. Умножаваме първото уравнение с 3, а второто уравнение с 2:

$$\begin{vmatrix} 9x-6y-57=0 \\ 8x+6y-28=0. \end{vmatrix}$$

Събираме двете уравнения и получаваме 17x = 85 или x=5. С тази стойност на x заместваме в едно от дадените уравнения, напр. в първото: 15-2y-19=0, т. е. y=-2. Единственото решение на системата е x=5, y=-2, следователно правите се пресичат в точката (5,-2).

Втори начин. Изразяваме едната неизвестна, напр. y чрез x от първото уравнение:

$$y = \frac{3x-19}{2}.$$

С тази стойност заместваме във второто уравнение:

$$4x + 3.\frac{3x-19}{2} - 14 = 0,$$

откъдето получаваме 17x = 85 или x = 5. Заместваме в израза за y и намираме y =-2.

Пресечната точка е (5,-2).

б) Разделяме второто уравнение с 3. Системата

$$\begin{vmatrix} 2x-5y=1 \\ 2x-5y=\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

очевидно няма решение, защото не е възможно изразът 2x – 5y да има едновременно стойности 1 и $\frac{2}{3}$ за едни и същи стойности на x и y. Това показва, че двете прави нямат обща точка, т. е. те са успоредни.

в) Ако второто уравнение разделим с 2, получената система

$$\begin{vmatrix} 4x+3y-1=0 \\ 4x+3y-1=0 \end{vmatrix}$$

съдържа две еднакви уравнения, което показва, че двете прави съвпадат.

27. За коя стойност на параметъра к, правите x+(к+1)y+3=0 и кx+2y-5=0 а) са успоредни;

б) се пресичат;

в) съвпадат.

Отг.: а) к = -2 и к = 1; б) Всяка стойност на $к \neq -2$ и $к \neq 1$; в) няма такава реална стойност за к.

*****

Ако в общото уравнение на правата $ax+by+c=0$ коефициентът $b\neq 0$, уравнението се преобразува във вида

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

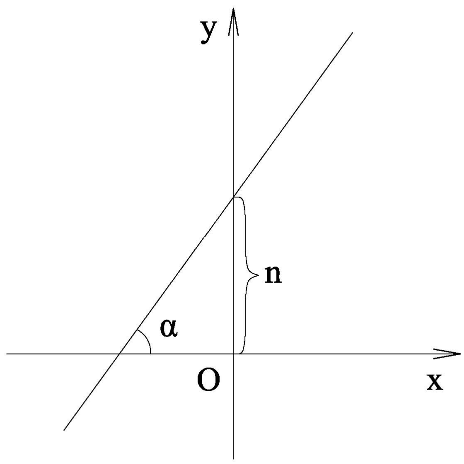
Ако означим $-\frac{a}{b} = k$ и $-\frac{c}{b} = n$, получаваме

(2) $$y = kx + n.$$

Този вид на уравнението се нарича *Декартово уравнение на правата.*

Параметърът k се нарича *ъглов коефициент* на правата и е равен на тангенса на ъгъла, който правата сключва с положителната посока на абсцисната ос, т. е.

$$k = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$



фиг. 2

Параметърът n се нарича *отрез на правата* и изразява частта, която правата “отрязва” от ординатната ос до началото на координатната система, фиг. 2.

28. Съставете уравнението на правата, която минава през точката N(0,5) и сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл 45^0.

Решение: От (2) имаме $k = \operatorname{tg}45^0 = 1$ и $n = 5$, така че търсеното уравнение е $y = x + 5$.

Забележка. Намереното уравнение може да се запише във вида $x – y + 5 = 0$, т. е. *Декартовият вид* (2) на уравнението може да се представи в *общ вид* (1).

Обратно, ако една права е зададена в *общ вид,* напр. $3x-4y+18=0$, от това уравнение лесно се получава *Декартовия вид* $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$.

29. Съставете уравнението на правата, която минава през точката $P(0,-4)$ и сключва с положителната посока на Ох ъгъл:

а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0; г) 120^0; д) 135^0; е) 150^0.

Отг.: а) $\sqrt{3}x-3y-12=0$; б) $x-y-4=0$; в) $\sqrt{3}x-y-4=0$; г) $\sqrt{3}x+y+4=0$; д) $x+y+4=0$; е) $\sqrt{3}x+3y+12=0$.

*****

Ако за една права са известни ъгловият коефициент к и точката (x_1,y_1), през която тя минава, уравнението на тази права има вида

(3) $$y - y_1 = к(x - x_1).$$

30. Съставете уравнението на правата, която има ъглов коефициент $\frac{4}{7}$ и минава през точката $(5,-3)$.

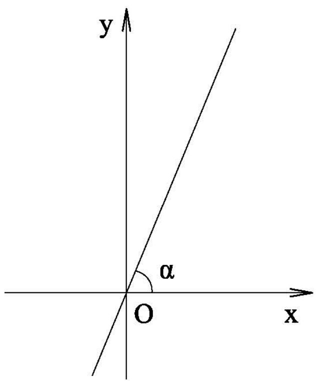
Решение: От (3) получаваме уравнението $y+3=\frac{4}{7}(x-5)$ или $4x-7y-41=0$.

31. Съставете уравнението на права, която минава през точката $(-\frac{9}{4},\frac{5}{3})$ и сключва с положителната посока на Ох ъгъл 135^0.

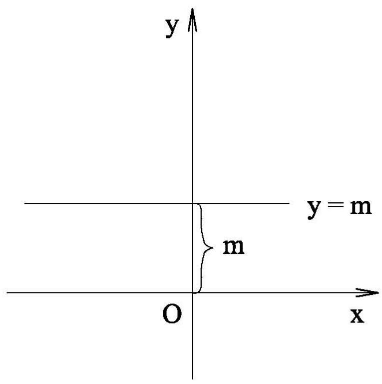
Отг.: $12x+12y+7=0$.

*****

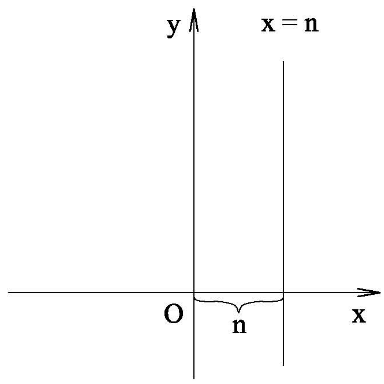
Всяка права, която минава през координатното начало и е различна от оста Оу, има уравнение $y=кx$. Числото $к=tg\alpha$ е ъгловият коефициент на правата, фиг. 3.



фиг. 3



фиг. 4



фиг. 5

Всяка права, която е успоредна на абсцисната ос има уравнение $y=m$. Числото m показва разстоянието от Ох до правата, фиг. 4.

Абсцисната ос има уравнение $y = 0$.

Всяка права, която е успоредна на ординатната ос има уравнение $x=n$. Числото n показва разстоянието от Oy до правата, фиг. 5.

Ординатната ос има уравнение $x = 0$.

32. Съставете уравнението на права, която минава през координатното начало и сключва с положителната посока на Ox ъгъл

а) 45^0; б) 60^0; в) 135^0; г) 150^0.

Отг.: а) $y=x$; б) $y=\sqrt{3}\,x$; в) $y=-x$; г) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

33. Определете стойностите на параметъра a, за които правата

$$p: (a+5)x + (a^2-1)y + a^2 - 5a + 6 = 0$$

е:

а) успоредна на абсцисната ос;

б) успоредна на ординатната ос;

в) минаваща през координатното начало.

Съставете уравненията на правите, отговарящи на намерените стойности на параметъра.

Решение: а) В уравнението на правата p полагаме $a + 5 = 0$, така че търсената стойност на параметъра е $a = -5$. Правата има уравнение $y = -\frac{7}{3}$.

б) От $a^2 - 1 = 0$ намираме $a=-1$ или $a=1$. Когато $a=-1$, правата p има уравнение $x = -3$, а когато $a = 1$, правата има уравнение $x = -\frac{1}{3}$.

в) От $a^2 - 5a +6=0$ получаваме $a=2$ или $a=3$. Правата p има уравнение $y = -\frac{7}{3}x$ или $y = -x$.

*****

Ако една права минава през точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, нейният ъглов коефициент е равен на

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

така че от (3) за уравнението на тази права получаваме

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (4)$$

34. Съставете уравнението на правата, която минава през точките:

а) $M_1(2,5)$ и $M_2(6,8)$; б) $N_1(-5,3)$ и $N_2(8,-4)$; в) $O(0,0)$ и $P(5,-6)$; г) $Q_1(\frac{1}{3},-2)$ и $Q_2(-3,\frac{7}{2})$.

Решение: а) От (4) получаваме $y-5 = \frac{8-5}{6-2}(x-2)$ или $3x-4y+14=0$;

Отг.: б) $7x+13y-4=0$; в) $6x+5y=0$; г) $33x+20y+29=0$.

35. Съставете уравненията на медианите в триъгълника с върхове $A(-1,-5)$, $B(7,-1)$, $C(6,9)$.

Решение: Средата на страната BC е точката $A_1(\frac{13}{2},4)$. Медианата през върха A има уравнение $y+5 = \frac{4+5}{\frac{13}{2}+1}(x+1)$ или $6x-5y-19=0$.

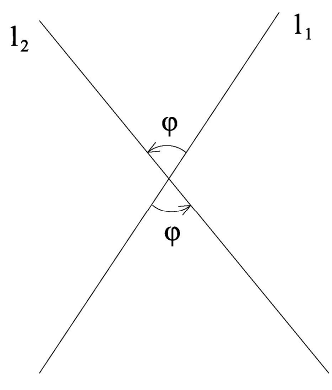
Отг.: Медианата през върха B има уравнение $2x+3y-11=0$, а медианата през върха C има уравнение $4x-y-15=0$.

*****

Ако правите l_1 и l_2 имат ъглови коефициенти съответно k_1 и k_2, то тангенсът на ъгла φ между тях се определя по формулата

(5) $$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Посоката на ъгла се приема обратна на часовниковата стрелка, както е прието в тригонометрията, фиг. 6. Два от получените ъгли са равни на φ, а другите два ъгъла са равни на $180^0 - \varphi$.



фиг. 6

Ако правите са успоредни или съвпадат, то

$$k_1 = k_2.$$

Обратното също е вярно: ако ъгловите коефициенти на две прави са равни, то правите са успоредни или съвпадат.

Ако правите са перпендикулярни, ъгловите им коефициенти изпълняват условието

$$k_1k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Обратното също е вярно: ако ъгловите коефициенти на две прави изпълняват горните зависимости, тези прави са перпендикулярни.

36. Определете ъгъла между правите l_1: $y=2x-5$ и l_2: $12x+4y-1=0$.

Решение: Декартовият вид на правата l_2 е $y = -3x + \frac{1}{4}$, така че ъгловите коефициенти на тези прави са $к_1=2$ и $к_2= -3$. По формула (5) определяме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-2}{1-6} = 1 \quad \text{или} \quad \varphi = 45^0 .$$

37. Намерете тангенса на ъгъла между правите:

а) 4x+3y-7=0 и 2x-5y+1=0;

б) x+2y-4=0 и $(8-5\sqrt{3})x + y - 2 = 0$;

в) 2x-5y+9=0 и 5x-y-8=0.

Отг.: а) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{26}{7}$; б) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^0$; в) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{23}{15}$.

38. Дадени са точката P(-3,5) и правата l: 4x+7y-2=0. Съставете уравнението на правата q, която минава през P и е успоредна на l.

Упътване: Ъгловите коефициенти на правите p и q са равни.

Отг.: q: 4x+7y-23=0.

39. Дадени са точка Q(4,-3) и права l: 4x+6y-13=0. Да се състави уравнението на правата q, която минава през Q и е перпендикулярна на l.

Упътване: Ъгловият коефициент на правата 1 е равен на $-\frac{2}{3}$, затова ъгловият коефициент на правата q е равен на $\frac{3}{2}$.

Отг.: q: 3x-2y-18=0.

40. Триъгълник има върхове A(-2,1), B(8,3), C(4,13). Определете тангенса на ъгъла между страната AB и медианата, минаваща през върха A.

Решение. Правата AB има ъглов коефициент

$$к_1 = \frac{3-1}{8+2} = \frac{1}{5};$$

средата на страната BC е точката (6,8), следователно медианата през върха A има ъглов коефициент

$$к_2 = \frac{8-1}{6+2} = \frac{7}{8},$$

така че от (5) намираме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}.\frac{7}{8}} = \frac{27}{47}.$$

41. Определете стойностите на параметъра a, за които в ΔABC с върхове $A(a, -\frac{1}{3})$, B(a+3,a+1), C(2,1), ъгъл ACB е равен на 90^0.

Решение: Ъгловите коефициенти на страните AC и BC са $к_{AC}=\dfrac{4}{3(2-a)}$ и $к_{BC}=\dfrac{a}{a+1}$. Тъй като AC и BC са перпендикулярни, следва $к_{AC}.к_{BC}= -1$. От квадратното уравнение $3a^2-7a-6=0$ получаваме $a = -\dfrac{2}{3}$ и $a = 3$.

42. Два срещуположни върха на квадрата ABCД са точките A(-3,2) и C(10,5). Да се съставят уравненията на страните на този квадрат.

Решение. Ъгловият коефициент на правата AC е равен на

$$к_{AC} = \frac{5-2}{10+3} = \frac{3}{13}.$$

Ако означим с к ъгловия коефициент на страната AB, тъй като AB и AC сключват ъгъл 45^0, то от (5) следва

$$\operatorname{tg} 45^0 = 1 = \frac{\frac{3}{13}-k}{1+\frac{3k}{13}},$$

откъдето $к = -\dfrac{5}{8}$. Толкова е и ъгловият коефициент на страната CД, защото AB и CД са успоредни, а ъгловите коефициенти на страните BC и AД са равни на $\dfrac{8}{5}$. За уравнението на страната AB от (4) получаваме

$$y-2 = -\frac{5}{8}(x+3)$$

или 5x+8y-1=0. За другите страни по аналогичен начин намираме BC: 8x-5y-55=0, CД: 5x+8y-90=0, AД: 8x-5y+34=0.

43. A(2,5) е връх, а O(3,-4) е пресечна точка на диагоналите на един квадрат. Намерете уравненията на страните на този квадрат (вж. задачи 15 и 42).

Отг.: 5x-4y+10=0; 4x+5y+49=0; 5x-4y-72=0; 4x+5y-33=0.

44. Намерете разстоянието от точка M(11,6) до правата p: 3x+4y-7=0.

Решение: Правата g, която минава през M и е перпендикулярна на p има уравнение g: 4x-3y-26=0 (вж. зад. 39). Нека правите p и g се пресичат в точката N. Нейните координати се определят от решението на системата

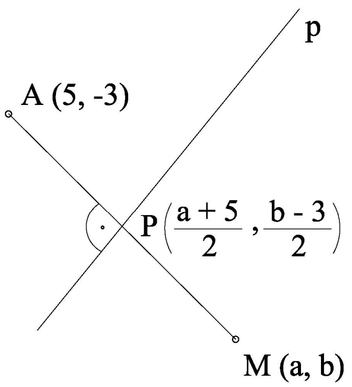
$$\left| \begin{array}{l} 3x+4y-7=0 \\ 4x-3y-26=0, \end{array} \right.$$

именно N(5,-2), вж. зад. 26. Разстоянието между точките M и N е търсеното разстояние:

$$|MN| = \sqrt{(11-5)^2+(6+2)^2} = 10.$$

45. Дадени са точките A(5,-3) и правата p: 6x-20y+19=0. Намерете координатите на точка M, която е симетрична на A спрямо p.

Решение: Първи начин: Ако търсените координати на точката M са (a,b), то средата P на отсечката AM ще има координати $(\frac{a+5}{2}, \frac{b-3}{2})$, фиг. 7.



фиг. 7

Точката P лежи на правата p, затова координатите й удовлетворяват нейното уравнение:

$$6.\frac{a+5}{2} - 20.\frac{b-3}{2} + 19 = 0.$$

Ъгловият коефициент на правата AM е равен на $\frac{b+3}{a-5}$, а ъгловият коефициент на правата p е равен на $\frac{3}{10}$. Правите p и AM са перпендикулярни, затова е в сила зависимостта

$$\frac{b+3}{a-5}.\frac{3}{10} = -1.$$

Системата, образувана от последните две уравнения за неизвестните a и b има решение a = 2, b = 7, т. е. M(2, 7).

Втори начин: Правата AM има ъглов коефициент $-\frac{10}{3}$, затова нейното уравнение е 10x+3y-41=0. Координатите на пресечната точка P на правите AM и p се определят от решението на системата

$$\begin{vmatrix} 10x + 3y - 41 = 0 \\ 6x - 20y + 19 = 0, \end{vmatrix}$$

именно $x = \frac{7}{2}, y = 2$. Координатите на точката M се определят от (вж. задачи 13 и 15):

$$\frac{7}{2} = \frac{x_M + 5}{2},\ \ 2 = \frac{y_M - 3}{2}$$

или M(2,7).

46. Страните на триъгълника ABC имат уравнения AB: 4x-y-7=0, BC: x+3y-31=0, AC: x+5y-7=0. Намерете уравненията на височините и координатите на *ортоцентъра* (пресечната точка на височините) на този триъгълник.

Решение: Координатите на върха A намираме от решението на системата

$$\begin{vmatrix} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 5y - 7 = 0, \end{vmatrix}$$

именно A(2,1). Останалите върхове са B(4,9), C(67,-12). Ъгловият коефициент на страната BC е равен на $-\frac{1}{3}$, следователно ъгловият коефициент на височината, минаваща през върха A е равен на 3. Уравнението на тази височина е 3x-y-5=0. По аналогичен начин се намират уравненията на височините съответно през B и C. Те са 5x-y-11=0 и x+4y-19=0.

Координатите на пресечната точка H на височините се определят от системата, образувана от кои да е две от получените уравнения за височините. Например от системата

$$\begin{vmatrix} 3x - y - 5 \ = 0 \\ 5x - y - 11 = 0 \end{vmatrix}$$

намираме, че ортоцентъра е точката H(3,4).

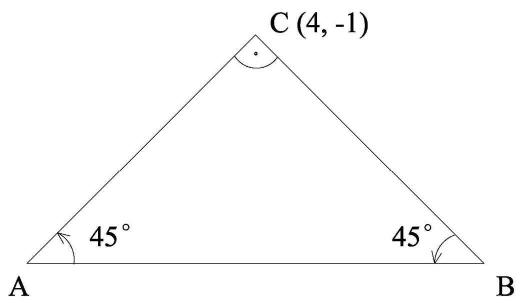
Проверете, че уравнението и на третата височина се удовлетворява от координатите на точката H.

47. Страните на триъгълник имат уравнения 2x+9y-10=0, 5x-3y-25=0, 7x+6y+16=0. Определете координатите на ортоцентъра на този триъгълник.

Отг.: $H(\frac{8}{3}, -2)$, вж. зад. 46.

48. Съставете уравненията на катетите на правоъгълен равнобедрен триъгълник, ако един от върховете му е точката C(4,-1), а уравнението на хипотенузата е 3x – y + 5 = 0.

Решение: От условието на задачата следва, че C е върхът на правия ъгъл, защото координатите (4,-1) не удовлетворяват уравнението на хипотенузата. Хипотенузата AB сключва ъгъл 45^0 с всеки от катетите, защото триъгълникът ABC е равнобедрен, фиг. 8.



фиг. 8

Ъгловият коефициент на AB е равен на 3. Ако с k означим ъгловия коефициент на BC, имаме

$$\mathrm{tg}45° = 1 = \frac{3-k}{1+3k}$$

или к = $\frac{1}{2}$. Катетите BC и AC са перпендикулярни, така че ъгловият коефициент на AC е равен на -2. Търсените уравнения на катетите са BC: x-2y-6=0 и AC: 2x+y-7=0.

49. A(-1,4) е връх в ΔABC, а h: 3x+4y-29=0 и m: 6x+5y-52=0 са уравненията съответно на височина и медиана, минаващи през един и същ връх на този триъгълник. Определете координатите на върховете B и C.

Решение: Координатите на точката A(-1,4) не удовлетворяват дадените уравнения, значи h и m се пресичат напр. във върха B. От системата, образувана от дадените уравнения намираме B(7,2).

Ако приемем, че третия връх е C(a,b), средата M на отсечката AC ще има координати $(\frac{a-1}{2},\frac{b+4}{2})$. Тази точка лежи на медианата m, така че

$$6.\frac{a-1}{2}+5.\frac{b+4}{2}-52=0.$$

Ъгловият коефициент на правата AC е равен на $\frac{b-4}{a+1}$. Ъгловият коефициент на височината към AC е равен на $-\frac{3}{4}$, затова

$$-\frac{3}{4}.\frac{b-4}{a+1}=-1.$$

Решението на системата, образувана от последните две уравнения е a = 5, b = 12, така че C(5,12).

50. Намерете стойностите на параметъра a, за които ъгълът между страната AB и медианата, минаваща през върха A в триъгълника с върхове A(-6,-1), B(9,a), C(-15,6) е равен на 45°.

Решение: Ъгловият коефициент на AB е равен на $к_1 = \frac{a+1}{15}$. Средата на AB е точката $M(-3,\frac{a+6}{2})$, затова ъгловият коефициент на медианата, минаваща през върха A е равен на $к_2 = \frac{a+8}{6}$. От формулата $\text{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, за $\varphi=45°$, намираме

a = ±4.

51. В равнобедрен правоъгълен триъгълник A(5,7) е връх при остър ъгъл, а 3x+2y-3=0 е уравнение на срещулежащия катет BC. Намерете:

а) координатите на върховете B и C;

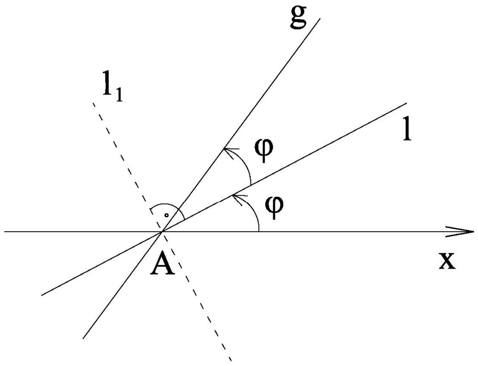
б) уравненията на страните AC и AB.

Упътване: Ако C е върхът на правия ъгъл, ъгловият коефициент на AC е $\frac{2}{3}$. Ъгъл ABC и ъгъл CAB са равни на 45^0, затова ъгловият коефициент на хипотенузата AB е равен на 5 или -1.

Отг.: а) C(-1,3), B(3,-3) или B(-5,9); б) AC: 2x-3y+11=0, AB: 5x-y-18=0 или AB: x+5y-40=0.

52. Дадена е правата g: 15x-20y-6=0. Да се намери уравнението на ъглополовящата на ъгъла, който правата g сключва с положителната част на абсцисната ос.

Решение: Първи начин: Ако l е ъглополовящата , то l и g се пресичат върху Ox в точката A($\frac{2}{5}$,0), фиг. 9. Абсцисната ос има уравнение y = 0, т. е. ъгловият й коефициент е равен на нула. Ъгловият коефициент на правата g е равен на $\frac{3}{4}$. Ако к е ъгловият коефициент на правата l, то



фиг. 9

$$\text{tg}\varphi = \frac{k-0}{1+0} = \frac{\frac{3}{4}-k}{1+\frac{3k}{4}}.$$

Квадратното уравнение $3к^2$+8к-3=0 има корени -3 и $\frac{1}{3}$. Ъгловият коефициент к = $\frac{1}{3}$ отговаря на ъглополовящата l, а к = -3 - на ъглополовящата l_1 на тъпия ъгъл между g и Ox. Уравнението на ъглополовящата l е 5x-15y-2=0.

Забележка: Ъглополовящата l_1 на тъпия ъгъл между g и Ox има уравнение 15x+5y-6=0. Двете ъглополовящи са перпендикулярни.

Втори начин: Задачата ще решим като използваме формулата от тригонометрията

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ако α е ъгълът, който g сключва с Ox, то ъгловият коефициент на g е равен на $tg\alpha = \frac{3}{4}$, а ъгловият коефициент на ъглополовящата l е равен на $tg\frac{\alpha}{2}$. От зависимостта

$$\frac{3}{4} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

получаваме квадратното уравнение за $tg\frac{\alpha}{2}$

$$3\,tg^2\frac{\alpha}{2} + 8tg\frac{\alpha}{2} - 3 = 0,$$

което има корени $tg\frac{\alpha}{2}$= -3 и $tg\frac{\alpha}{2}$= $\frac{1}{3}$. С корена $\frac{1}{3}$ се получава уравнението на ъглополовящата l.

53. Докажете, че ако k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на две пресекателни прави, а k е ъгловият коефициент на ъглополовящата на ъгъла, който правите сключват е в сила зависимостта

$$(6) \qquad k^2 + 2\frac{1-k_1k_2}{k_1+k_2}k - 1 = 0.$$

Упътване: Ъглополовящата сключва с всяка от правите един и същ ъгъл, затова е в сила равенството

$$\frac{k-k_1}{1+k_1k} = \frac{k_2-k}{1+kk_2}.$$

След опростяване на това равенство се получава зависимостта (6).

54. Да се намерят уравненията на ъглополовящите на ъглите, които сключват правите $3x + 4y - 17 = 0$ и $12x - 5y - 26 = 0$.

Решение: Правите се пресичат в точката (3,2). С $k_1 = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = \frac{12}{5}$ от (6) получаваме квадратното уравнение $33k^2+112k-33=0$, което има корени $-\frac{11}{3}$ и $\frac{3}{11}$.

Двете ъглополовящи имат уравнения $3x - 11y + 13 = 0$ и $11x + 3y - 39 = 0$.

55. Правата l е ъглополовяща на ъгъла, който сключват правите p_1 и p_2. Ако p_1 и l имат уравнения p_1: $x-2y+7=0$, l: $3x-2y-3=0$, съставете уравнението на правата p_2.

Упътване: С $k_1 = \frac{1}{2}$ и $k = \frac{3}{2}$ от (6) намираме $k_2 = \frac{29}{2}$. Правите p_1 и l се пресичат в точката (5,6). Уравнението на правата p_2 е $29x-2y-133=0$.

56. Намерете лицето на триъгълника ABC с върхове A(-3,1), B(12,-5), C(6,9).

Решение. Първи начин: Уравнението на страната AB е $2x+5y+1=0$, а ъгловият коефициент на височината през върха C е равен на $\frac{5}{2}$. Височината през този връх има уравнение $5x-2y-12=0$. От системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x+5y+1=0 \\ 5x-2y-12=0 \end{array} \right.$$

определяме координатите на точката H(2,-1), в която височината през C пресича страната AB. Лицето S на ΔABC е равно на

$$S = \frac{1}{2}|AB|.|CH|$$

и понеже $|AB| = 3\sqrt{29}$, а $|CH| = 2\sqrt{29}$, то $S = 87$.

Втори начин: Вж. зад. 90.

57. За кои стойности на параметъра a лицето на триъгълника с върхове A(-2,a), B(7,-1), C(-a,6) е равно на $\frac{71}{2}$.

Отг.: $a = -5$ и $a = -3$. Вж. зад. 90.

Тест за самоподготовка

1. Общото уравнение на правата, която има ъглов коефициент $к = -\dfrac{7}{5}$ и минава през точката (4,-9), е

   а) 7x-3y-55=0; б) 3x+2y+6=0; в) 7x+5y+17=0; г) 7x-5y-73=0.

2. Медианата през върха B в триъгълника с върхове A(-7,1), B(4,2), C(11,15) има уравнение:

   а) x+y-6=0; б) 3x+y-14=0; в) x+3y-10=0; г) x-y-2=0.

3. Тангенсът на ъгъл BAC в триъгълника с върхове A(-2,-3), B(12,1), C(6,7) е равен на:

   а) $\dfrac{27}{38}$; б) $\dfrac{14}{23}$; в) $\dfrac{71}{42}$; г) $\dfrac{60}{29}$.

4. Стойностите на параметъра a, за които ъгълът между страната AB и медианата през върха A в триъгълника с върхове A(1,2), B(7,a), C(5,8) е равен на 45^0, са:

   а) 3 и 4; б) -2 и 3; в) ±1; г) -4 и -2.

5. A(2,3) и C(5,9) са срещуположни върхове на квадрата ABCД. Уравнението на диагонала ВД е:

   а) 3x+4y-10=0; б) x-y+3=0; в) 2x-y+5=0; г) 2x+4y-31=0.

6. Дадена е правата p: 12x-5y-24=0. Ъглополовящата на ъгъла, който правата p сключва с абсцисната ос, има уравнение:

   а) 2x+13y-4=0; б) 2x-3y-4=0; в) 5x-y-10=0; г) 4x-y-8=0.

7. Дадена е правата p: x+5y-14=0 и точката M(7,4). Координатите на точката N, която е симетрична на M спрямо правата p, са:

   а) (-3,2); б) (6,-1); в) (5,2); г) (7,0).

Ключови понятия към глава 1.3.

Уравнение на окръжност

Пълно уравнение от втора степен с две неизвестни

Център на окръжност

Радиус на окръжност

Вътрешна и външна точка спрямо окръжност

Допирателна към окръжност

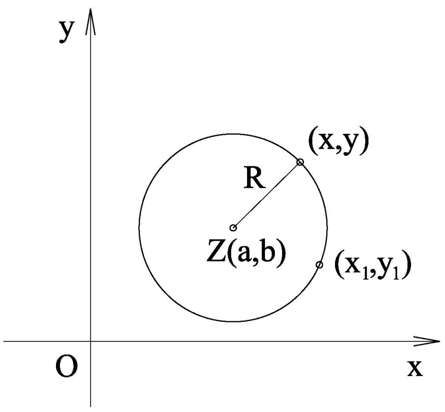
Симетрала на отсечка

1.3. Окръжност

След усвояването на материала в тази глава ще знаете:

- **вида на уравнението на окръжност;**
- **на какви условия трябва да отговарят коефициентите на едно пълно уравнение от втора степен с две неизвестни, за да представя то окръжност;**
- **ако едно уравнение отговаря на окръжност как се определят центъра и радиуса на тази окръжност;**
- **как се определя уравнението на допирателната към окръжност.**

Окръжността е геометричното място на точки в равнината, равноотдалечени от дадена точка Z. Точката Z се нарича *център,* а разстоянието R от центъра до всяка точка на окръжността се нарича *радиус* на окръжността, фиг. 10.



фиг. 10

Ако Z(a,b) е центърът, а R е радиусът на една окръжност, нейното уравнение е

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Ако точката с координати (x_1,y_1) лежи на тази окръжност, числата x_1 и y_1 заместени на мястото на x и y ще удовлетворят уравнението. Обратно: ако две числа x_1 и y_1 удовлетворяват уравнението, то точката (x_1,y_1) лежи на тази окръжност.

Това уравнение се нарича *нормално уравнение* на окръжността и може да се запише във вида

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Ако центърът на окръжността е координатното начало O(0,0), уравнението се нарича *централно* и има вида

$$x^2+y^2=R^2.$$

Общото уравнение от втора степен с две неизвестни има вида

(2) $$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0.$$

То отговаря на окръжност, ако са изпълнени едновременно условията:

а) $A=B\neq 0$,

б) $C=0$,

в) $D^2+E^2-4F>0$.

Когато уравнението (2) отговаря на окръжност, нейният център е точката $Z(-\dfrac{D}{2A},-\dfrac{E}{2A})$, а радиусът на окръжността е равен на $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{D^2+E^2-4AF}{A}}$.

Взаимното положение на дадена точка $M_1(x_1,y_1)$ спрямо една окръжност с радиус R се определя от разстоянието

$$d=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}$$

между точката M_1 и центъра $Z(a,b)$ на окръжността, именно:

а) ако $d<R$, M_1 е вътрешна точка за окръжността;

б) ако $d=R$, M_1 лежи на окръжността;

в) ако $d>R$, M_1 е извън окръжността.

58. Да се състави уравнението на окръжност, ако:

а) центърът ѝ е координатното начало и радиусът ѝ е равен на 7;

б) центърът ѝ е точката Z(3,-2) и радиусът ѝ е равен на 5;

в) центърът ѝ е точката Z(-5,4) и тя минава през координатното начало;

г) центърът ѝ е точката Z(-3,0) и тя минава през точката (6,-7);

д) краищата на един неин диаметър са точките (-2,7) и (10,-3).

Отг.: а) $x^2+y^2=49$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$; в) $(x+5)^2+(y-4)^2=41$; г) $(x+3)^2+y^2=130$; д) $(x-4)^2+(y-2)^2=61$.

59. Дадено е уравнението $x^2+y^2-6x+8y+15=0$.

а) Установете, че то отговаря на окръжност;

б) установете положението на точките M(1,-2), N(2,-7) и P(-5,1) спрямо тази окръжност;

в) съставете уравнението на допирателната към тази окръжност, която минава през точката N.

Решение: а) Коефициентите пред x^2 и y^2 имат стойност 1; смесеното произведение xy не участва в уравнението; в сила е неравенството

$$D^2+E^2-4F=(-6)^2+8^2-4.15=40>0.$$

Това показва, че даденото уравнение е окръжност.

б) Центърът на тази окръжност е точката Z(3,-4), а радиусът ѝ е равен на

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}\,.$$

Разстоянието от точка M(1,-2) до центъра Z(3,-4) е равно на

$$|MZ| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{8} < R,$$

следователно M е вътрешна точка за окръжността. По аналогичен начин определяме

$$|NZ| = \sqrt{10} = R, \qquad |PZ| = \sqrt{89} > R,$$

което показва, че N лежи на окръжността, а P е извън нея.

в) Ще използваме съществения факт, че допирателната към една окръжност е перпендикулярна на радиуса, прекаран в точката на допирането.

Ъгловият коефициент на правата ZN е равен на

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7+4}{2-3} = 3\,,$$

затова ъгловият коефициент на допирателната към окръжността, минаваща през точката N е равен на $-\frac{1}{3}$. Уравнението на търсената допирателна е

$y + 7 = -\frac{1}{3}(x-2)$, т. е. $x+3y+19=0$.

60. Ако M и N са пресечните точка на окръжността $x^2+y^2-14x+8y+39=0$ и правата $3x+2y=0$, а Z е центърът на окръжността, намерете лицето на ΔMNZ.

Решение: Координатите на пресечните точки на окръжността и правата са решенията на системата

$$\left| \begin{aligned} & x^2 + y^2 - 14x + 8y + 39 = 0 \\ & 3x + 2y = 0. \end{aligned} \right.$$

Със стойността на $y = -\frac{3x}{2}$ от второто уравнение заместваме в първото уравнение:

$$x^2 + \frac{9x^2}{4} - 14x - 12x + 39 = 0.$$

Квадратното уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$ има корени $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$. За y получаваме съответно $y_1 = -3$ и $y_2 = -9$. Пресечните точки на правата с окръжността са M(2,-3) и N(6,-9), а центърът на окръжността е Z(7,-4).

Триъгълникът MNZ е равнобедрен, защото ZM и ZN са радиуси, следователно ако прекараме височина от Z към MN тя ще пресече отсечката MN в нейната среда и това е точката P(4,-6). Лицето S на ΔMNZ е равно на

$$S = \frac{1}{2}|MN|.|PZ|.$$

Тъй като $|MN| = 2\sqrt{13}$, $|PZ| = \sqrt{13}$, то $S = 13$.

61. За коя стойност на параметъра a, правата $x+2y-6=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2-4x+6y+a=0$? Определете координатите на допирната точка.

Решение. Правата ще бъде допирателна към окръжността, ако системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2-4x+6y+a=0 \\ x+2y-6=0 \end{array} \right.$$

има само едно решение. Това единствено решение ще даде координатите на допирната точка.

С $x = 6 - 2y$ заместваме в първото уравнение. Квадратното уравнение $5y^2-10y+12+a=0$ ще има само едно решение, ако дискриминантата $D_1=25-5(12+a)$ е равна на нула. От $D_1=0$ намираме $a = -7$, което е търсената стойност за параметъра.

За $a = -7$ от квадратното уравнение $5y^2-10y+5=0$ получаваме $y = 1$, откъдето $x = 4$. Допирната точка е $(4,1)$.

62. Дадени са окръжността $x^2+y^2-6x-4y+11=0$ и правата $y = x+n$, където n е параметър. Установете за кои стойности на параметъра n правата:

а) пресича окръжността;

б) допира окръжността;

в) няма общи точки с окръжността.

Решение. От системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2-6x-4y+11=0 \\ y=x+n \end{array} \right.$$

се получава квадратното уравнение $2x^2+2(n-5)x+n^2-4n+11=0$.

Дискриминантата D_1 е равна на:

$$D_1 = (n-5)^2-2(n^2-4n+11)=-n^2-2n+3.$$

Ако $D_1 > 0$, уравнението има два реални и различни корена, т. е. правата пресича окръжността. Ако $D_1 = 0$, уравнението има само един корен и тогава правата е допирателна. Ако $D_1 < 0$, уравнението няма реални корени, т. е. правата няма общи точки с окръжността.

Отг.: а) $n\in(-3,1)$; б) $n = -3$ и $n = 1$; в) $n\in(-\infty, -3)\cup(1,\infty)$.

63. Дадени са окръжността $x^2+y^2-10x+16=0$ и правата $y = kx$, където k е параметър. Определете стойностите на параметъра k, за които правата:

а) пресича окръжността;

б) допира окръжността;

в) няма общи точки с окръжността.

Отг.: Вж. зад. 62. а) $k\in\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$; б) $k = \pm\frac{3}{4}$; в) $k\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},\infty\right)$.

64. Намерете зависимост между параметрите k, n и R, при която правата $y=kx+n$ ще бъде допирателна на окръжността $x^2+y^2=R^2$. За $k = -\frac{4}{3}$ и $n = \frac{25}{3}$ определете координатите на допирната точка.

Отг.: $\dfrac{n^2}{k^2+1}=R^2$; $T(4,3)$.

65. През точка A(4,2) са прекарани две допирателни към окръжността $x^2+y^2=10$.

а) Съставете уравненията на допирателните;

б) определете ъгъла между допирателните;

в) намерете координатите на допирните точки.

Упътване: Първи начин: Всяка права, която минава през точката (4,2) има уравнение у-2=к(х-4). Ако с у=к(х-4)+2 се замести в уравнението на окръжността, дискриминантата на полученото квадратно уравнение относно х трябва да бъде нула.

Втори начин: В уравнението у=кх+2-4к приемете, че n=2-4k и използвайте зависимостта от задача 64.

Отг.: а) t_1: х+3у-10=0, t_2: 3х-у-10=0; б) 90^0; в) $T_1(1,3)$, $T_2(3,-1)$.

66. Съставете уравненията на допирателните към окръжността $x^2+y^2-10x-4y+25=0$, които минават през координатното начало.

Отг.: 20х-21у=0 и у=0.

67. Да се състави уравнението на окръжността, която минава през точките A(-1,5), B(-2,-2), C(5,5).

Решение: Първи начин: Правата, която минава през средата на отсечката AB и е перпендикулярна на AB (тя се нарича *симетрала* на AB) има уравнение х+7у-9=0. Симетралата на отсечката BC има уравнение х+у-3=0. Двете симетрали се пресичат в центъра на търсената окръжност и това е точката Z(2,1). Радиусът R=$|ZA|$ на окръжността е равен на R=$\sqrt{(2+1)^2+(1-5)^2}=5$. Търсеното уравнение е $(x-2)^2+(y-1)^2=25$, т. е.

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0.$$

Втори начин: Уравнението на търсената окръжност можем да запишем във вида

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0.$$

Трябва да се намерят коефициентите p, q, r.

Точката A(-1,5) лежи на окръжността, следователно координатите й удовлетворяват уравнението:

$$(-1)^2 + 5^2 + (-1)p + 5q + r = 0$$

или p - 5q – r = 26. Точките B и C също лежат на окръжността, следователно и техните координати удовлетворяват уравнението на окръжността. Така се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} p-5q-r=26 \\ 2p+2q-r=8 \\ 5p+5q+r=-50. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е p = -4, q = -2, r = -20. Търсеното уравнение е

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

Тест за самоподготовка

1. Радиусът на окръжността $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 7 = 0$ е равен на:

   а) 3; б) $\frac{\sqrt{29}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{33}}{2}$; г) 4.

2. Спрямо окръжността $x^2+y^2+2x-4y+2=0$ точката $M(-2,3)$ е:

   а) вътрешна за окръжността;

   б) лежи на окръжността;

   в) външна за окръжността.

3. Точката $T(5,1)$ лежи на окръжността $x^2+y^2-6x+8y-4=0$.

   Уравнението на допирателната към окръжността в точката T е:

   а) $3x-2y-13=0$; б) $x+y-6=0$; в) $2x+y-11=0$; г) $2x+5y-15=0$.

4. Ако Z е център на окръжността $x^2+y^2-4x-16y+58=0$, а M и N са общите точки на правата $x+2y-13=0$ с тази окръжност, лицето на ΔMNZ е равно на:

   а) 4; б) 5; в) $\sqrt{6}$; г) $\sqrt{5}$.

5. Стойността на параметъра A, за която правата $3x-y-2=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2-2x+4y+A=0$, е равна на:

   а) $\frac{12}{5}$; б) $\frac{41}{10}$; в) 4; г) 5.

6. Радиусът на окръжността, която минава през трите точки $(0,-2)$, $(-7,-1)$, $(-6,6)$, е равен на:

   а) 5; б) 4; в) 3; г) 2.